

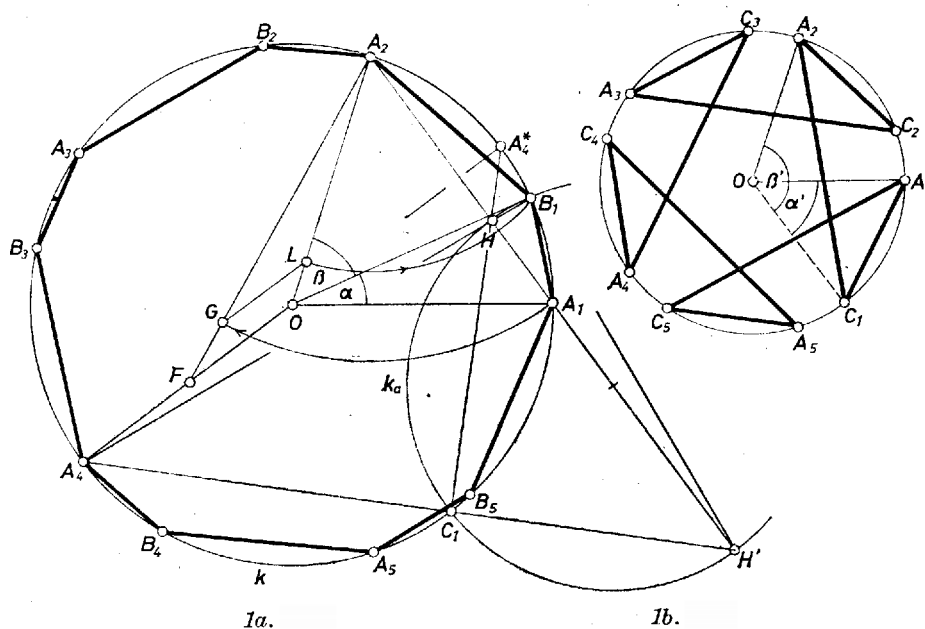
Előzetes megjegyzés. A feladatnak több, egymással nem egybevágó megoldása van, mert nincs előírva, hogy a 10-szög konvex legyen. Közöségesen konkáv (180° -nál nagyobb belső szöget tartalmazó) nem lehet az idom a körbe írható volta miatt, de hurkolt – amelyben az egymás utáni szögpontokat összekötő szakaszok át is metszhetik egymást, mint pl. az ismert csillagötszögben – többféleképpen is lehet.

A feladat szövege viszont *nem kívánja, hogy minden lehetséges* megoldást szerkesszen meg a versenyző, csak (legalább egy) „olyat”. Az *olyanok* közül a szerkesztőség többet közül, de nem taglaljuk, hogy velük megadtunk-e minden megoldást.

I. megoldás. a) Az 1a. ábra szerinti $A_1B_1A_2B_2A_3 \dots B_5$ konvex megoldásban $B_1A_2 = B_2A_3 = \dots = B_5A_1 = 2 \cdot A_1B_1 = 2 \cdot A_2B_2 = \dots = 2 \cdot A_5B_5$. Az egymás közt egyenlő 5–5 oldal az adott k körnek egyenlő húrja, így az O középpontból vett látószögük egyenlő. Legyen $A_1OB_1 \sphericalangle = \alpha$ és $B_1OA_2 \sphericalangle = \beta$, így $5\alpha + 5\beta = 360^\circ$, $\alpha + \beta = A_1OA_2 \sphericalangle = B_1OB_2 \sphericalangle = \dots = B_5OB_1 \sphericalangle = 72^\circ$, tehát mind az A_i csúcsok, mind a B_i -k ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) külön-külön egy-egy a k -ba beírt (konvex) szabályos ötszög egymás utáni csúcsai.

Megszerkesztve az $A_1 \dots A_5$ segédötszöget – közismertnek vesszük az erre vonatkozó ún. Ptolemaiosz–Dürer-féle eljárást, ezért ezt itt nem részletezzük –, B_1 -et a $B_1A_1 : B_1A_2 = 1:2$ arálynak megfelelően kell megszerkesztenünk. Felhasználjuk, hogy a háromszög két oldalának aránya megjelenik a harmadik oldal két részének arányában, ha ezt a (belső) szögfelezővel vágjuk ketté. Eszerint az $A_1B_1A_2$ háromszög B_1 -ből induló felezője az A_1A_2 húrt A_1 -hez közelebbi H harmadoló pontjában metszi. Másrészt ez a szögfelező a kerületi szögekre vonatkozó tételek szerint a B_1 -et nem tartalmazó A_1A_2 ívet is felezi, tehát átmegy a segédötszög A_4 csúcsán. Eszerint B_1 -et k -ból az A_4H egyenes metszi ki, ebből a $B_2, \dots, B_5$ csúcsok már megszerkeszthetők.

A szerkesztés helyessége az elemzés alapján nyilvánvaló, a végrehajtás egyértelmű.

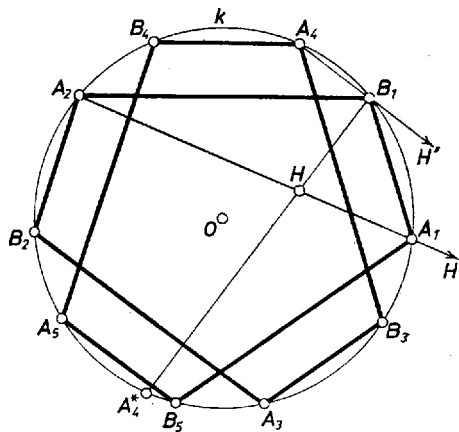


b) Lényegében ugyanígy kapjuk az 1. ábra jobb felső sarkán bemutatott $A_1C_1A_2C_2A_3 \dots C_5$ hurkolt megoldást, amelyben $C_1A_2 = C_2A_3 = \dots = C_5A_1 = 2A_1C_1 = 2A_2C_2 = \dots = 2A_5C_5$, de a rövidebb oldalakon mindig visszafelé haladunk a kétszer akkora oldalakon való előrehaladáshoz képest. Az ábra jelöléseivel itt $\beta' - \alpha' = 72^\circ$. Eszerint C_1 -et a nagyobb A_2A_1 köríven várjuk, és így H -t a rövidebb A_1A_2 ív A_4^* felezőpontjával (A_4 átellenes pontjával) összekötő egyenes metszi ki k -ból.

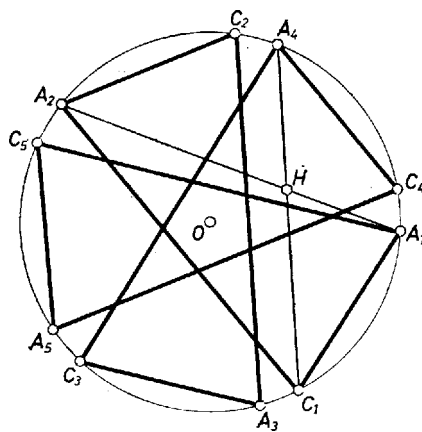
a) rész *Angyal József* (Budapest, Berzsenyi D. Gimn.)

b) rész *Földes Tamás* (Budapest, Berzsenyi D. Gimn.)

Az ábrákat annak kedvéért helyeztük el sorszámaiktól eltérő rendben, hogy a szöveg és a hozzá tartozó ábra – a kényyszerű lapozás ellenére – könnyebben legyen együtt olvasható, szemlélhető.



Megjegyzések. 1. A közönséges szabályos ötszög helyett szabályos csillagötszögből kiindulva ugyanígy kapjuk a $2a$ ábrabeli $A_1B_1A_2 \dots B_5$ megoldást és a $2b$ ábrabeli $A_1C_1A_2 \dots C_5$ megoldást (a fele akkora húron ismét ugyanazon irányban, ill. ellentétes irányban fordulunk el a körön), de a helyzet alapján mindkét esetben A_4 -et, A_4^* -ot a másikkal kell helyettesítenünk.



Földes Tamás

2. A B_1, C_1 pontot kimetszhetjük k -ból az A_1, A_2 alappontokhoz és az $A_1P:PA_2 = 1:2$ távolságarányhoz tartozó k_a Apollóniosz-körrel is (1. és 2. ábrák). E kör egy átmérője a HH' szakasz, ahol H' az A_2A_1 szakasz A_1 -en túli meghosszabbításán az a pont, melyre $A_2H' = 2A_1H'$, vagyis A_2 -nek A_1 -re vonatkozó tükörképe.

a) *Horváth Márta* (Tata, Eötvös J. Gimn.)

b) és a csillagötszögek esetében: *Földes Tamás*

3. Meg lehet mutatni, hogy H helyett a H' pont felhasználásával is szerkeszthető a B_1, C_1 pont, A_4 és A_4^* közül mindig a másikat használva, mint fent. (Ugyanis H' -t a B_1 -nél, ill. C_1 -nél levő külső szögfelező metszi ki az A_1A_2 egyenesből.) Ez a megállapítás az 1b ábra szerkesztésében előnyös, mert A_4^* elég közel van H -hoz, az A_4^*H egyenes rajzolása pontatlan lehet.

4. Ugyanezen elvek szerint 10-szög helyett $2n$ -szög is szerkeszthető k -ba váltakozva kétszer, ill. feleakkora oldalakkal, hacsak a szabályos n -szög megszerkeszthető (eukleidészi módon).

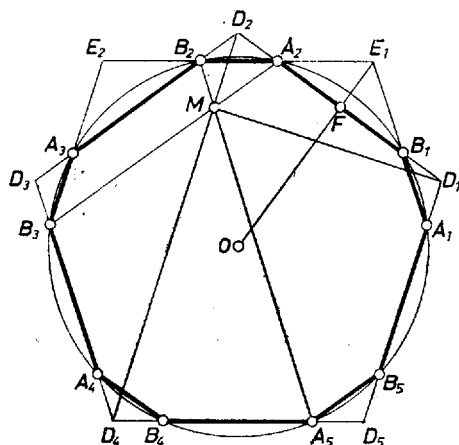
II. megoldás. Az I. megoldás bevezetőjében láttuk szerint $A_1B_1A_2\angle = 144^\circ$ – ami a szabályos ötszögből is kimásolható –, tehát egy 144° -os szög szárait 1 és 2 egységnyi szakaszokat fölmérve, a kívánthoz hasonló $A'_1B'_1A'_2$ háromszöget kapunk. Ha még megrajzoljuk ennek körülírt körét, és az ábrát úgy nagyítjuk vagy kicsinyítjük, hogy a kör sugara egyenlő legyen az adott kör sugarával, akkor az $A'_1B'_1A'_2$ háromszög képe egybevágó lesz az $A_1B_1A_2$ háromszöggel. Ebből már teljessé tehető az ábra.

Tóth-Pál Zsolt (Budapest, Móricz Zs. Gimn.)

Megjegyzések. 1. Kimetszhetjük B_1 -et úgy is, hogy az A_1 csúcsba lemásoljuk az $A'_2A'_1B'_1$ szöget.

Branda Éva (Vác, Sztáron S. Gimn.)

2. A mondott elv alapján, de még egyszerűbben visz célba a következő eljárás (1a ábra). Legyen az OA_4 sugár felezőpontja F , így az FOA_2 háromszög hasonló $A_1B_1A_2$ -höz. Ha még az A_2F , A_2O félegyenese G , ill. L az a pont, amelyre $A_2G = A_2A_1$, ill. $GL \parallel FO$, akkor az A_2 körüli, L -en átmenő kör a rövidebb A_1A_2 ívből kimetszi B_1 -et.

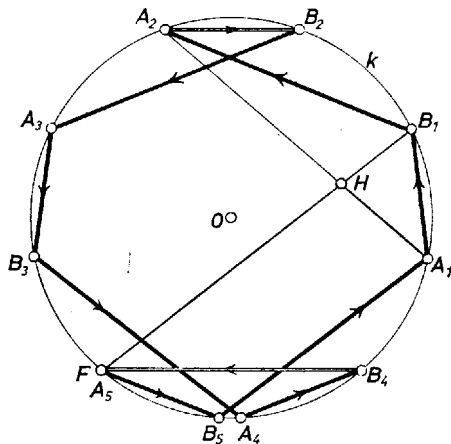
$$D_1 D_2 = B_1 A_2 + 2 \cdot \frac{A_1 B_1 / 2}{\cos 36^\circ} = A_1 B_1 \left(2 + \frac{4}{\sqrt{5} + 1} \right) = A_1 B_1 (1 + \sqrt{5})$$


($\cos 36^\circ = \sin 54^\circ$ értékét az 1766. feladatból¹ vettük át), tehát

$$A_1B_1 = \frac{B_1A_2}{2} = \frac{D_1D_2}{1+\sqrt{5}} = D_1D_2 \frac{\sqrt{5}-1}{4} = D_1D_2 \sin 18^\circ = D_2M,$$

Megjegyzés. Könnyű látni, hogy D_2M ismételt fölmérése helyett párhuzamos egyenesek rajzolásával is kimetszhetjük az A_i, B_j csúcokat: megindulásként M -en át D_3D_2 -vel és D_3D_4 -gyel, majd A_2 -n, B_3 -on, A_5 -ön és B_2 -n át más ötszögmoldalakkal.

IV. megoldás. A 4. ábra az I. megoldás elve alapján olyan 10-szöget mutat be, amelyben mind a hosszabb, mind a rövidebb oldalt 4-szer a pozitív forgási irányban mértük fel, 1-szer az ellentétes irányban: $(4-1)(\alpha+\beta) = 360^\circ$, $\alpha+\beta = 120^\circ$.



4. ábra

¹ K. M. L. 43 (1971) 15.