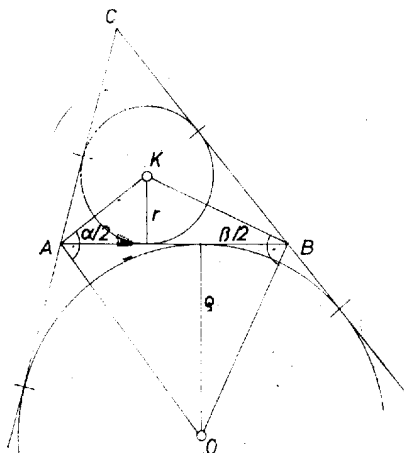


Jelöljük az ABC háromszögbe írt kör középpontját K -val, az AB oldalhoz tartozó hozzáírt kör középpontját O -val. Mivel az ABK , ABO háromszögek magassága rendre r és ϱ , azért az r/ϱ hányados egyenlő a két háromszög területének a hányadosával. Jelöljük az ABC háromszög A -nál és B -nél levő szögét a szokásos módon α -val és β -val, akkor az ABK háromszögben az AB alapon levő szögek nagysága $\alpha/2$ és $\beta/2$, tehát ennek a háromszögnek a területe



$$t_{ABK} = AB^2 \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right)}.$$

Az ABO háromszögben $BAO\angle = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $ABO\angle = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$,
tehát

$$t_{ABO} = AB^2 \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right)},$$

és ezek szerint

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{t_{ABK}}{t_{ABO}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}.$$

Ez az eredmény természetesen értelemszerűen módosítva érvényes minden háromszögre (bármely háromszögben a beírt kör sugarának és az egyik – alapnak választott – oldalhoz hozzáírt kör sugarának a hányadosa egyenlő az alapon levő szögek felének a tangenséből képzett szorzattal). Így az AMC és BMC háromszögekben

$$\frac{r_1}{\varrho_1} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{AMC\angle}{2}, \quad \frac{r_2}{\varrho_2} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{BMC\angle}{2}.$$

Mivel az AMC és BMC szögek egymást 180° -ra egészítik ki, azért $\frac{1}{2}AMC\angle$ és $\frac{1}{2}BMC\angle$ egymás pótszögei, és így

$$\operatorname{tg} \frac{AMC\angle}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{BMC\angle}{2} = 1,$$

tehát $\frac{r_1}{\varrho_1}$ és $\frac{r_2}{\varrho_2}$ szorzata valóban egyenlő $\frac{r}{\varrho}$ -val.

Megjegyzések. 1. A háromszög oldalai, az érintő körök sugarai és a terület között fennálló összefüggések segítségével belátható, hogy a feladat állítása ekvivalens az ún. Stewart-tétellel, mely szerint

$$AC^2 \cdot MB + BC^2 \cdot AM = (MC^2 + AM \cdot MB)AB.$$

Az ehhez szükséges algebrai átalakítások azonban nem érik meg a fáradságot, mert a Stewart-tételt körülbelül ugyanolyan nehéz bizonyítani – ha nem nehezebb mint a feladatban szereplő összefüggést.

2. A feladat állításából triviálisan következik az alábbi általánosítás. Ha $A_0, A_1, \dots, A_k$ egy egyenes egymást követő pontjai, C az egyenesen kívül levő pont, r_i és ϱ_i az $A_{i-1}A_iC$ háromszögbe, ill. az $A_{i-1}A_i$ oldalhoz írt kör sugara ($i = 1, 2, \dots, k$), r és ϱ az A_0A_kC háromszögbe, ill. az A_0A_k oldalhoz írt kör sugara, akkor

$$\frac{r_1}{\varrho_1} \cdot \frac{r_2}{\varrho_2} \cdot \dots \cdot \frac{r_k}{\varrho_k} = \frac{r}{\varrho}.$$