

Aminek a logaritmusa $1/2$, az az alapszám pozitív négyzetgyöke, így egyenletünk ekvivalens az

$$(1) \quad \sqrt{4-x} = 3 - \sqrt{4-x(4-x)}$$

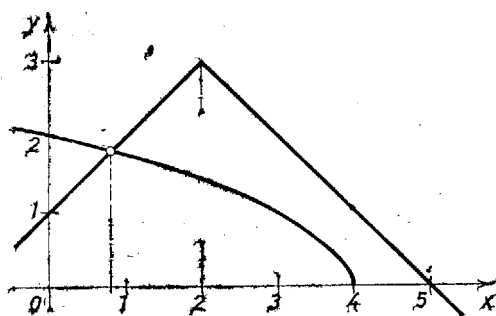
egyenlettel, hacsak $4-x \neq 1$, mert 1 nem lehet logaritmus alapja. A jobb oldalon a gyökjel alatt teljes négyzet áll: $4-x(4-x) = (x-2)^2$. Eszerint (1) ekvivalens a következővel:

$$(2) \quad \sqrt{4-x} = 3 - |x-2|.$$

Ábrázolva a két oldalon álló függvényeket, grafikusán egy gyököt kapunk $x = 0,8$ körül, ami az $x < 2$ esetre vonatkozó

$$(2a) \quad \sqrt{4-x} = 3 - (2-x) = x+1$$

egyenlet gyöke lehet.



Négyzetre emelve az $x^2 + 3x - 3 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, melynek gyökei közül a kisebbik nem jön szóba, mert a mellett $x+1$ negatív, (2a) jobb oldalán viszont $x+1$ -nek pozitívnak kell lennie. A nagyobbik gyök:

$$x_1 = (\sqrt{21} - 3)/2 = 0,791, \text{ gyöke (2a)-nak, mert így } 4 - x_1 = \frac{11 - \sqrt{21}}{2} = \left(\frac{\sqrt{21} - 1}{2}\right)^2 (= 3,209) \text{ és } x_1 + 1 = \frac{\sqrt{21} - 1}{2} > 0.$$

Mivel $x_1 < 2$, azért (2a)-n kívül (2)-nek is gyöke, tehát x_1 az eredeti egyenlet egyetlen gyöke.

Megjegyzések. 1. Az ellenőrző behelyettesítés kényelmesebb volt (2a)-ban, ill. (2)-ben; nem árt viszont látni az eredetiben is:

$$\log_{6,209} 1,791 = \frac{\lg 1,791}{\lg 3,209} = \frac{0,2531}{0,5063} = 0,5.$$

2. A grafikus tájékozódás csak az $x > 2$ esetnek megfelelő $\sqrt{4-x} = 3 - (x-2)$ egyenlet kizárására szolgált. Közvetlen négyzetre emeléssel is beláthattuk volna, hogy ennek az egyenletnek nincs valós gyöke.