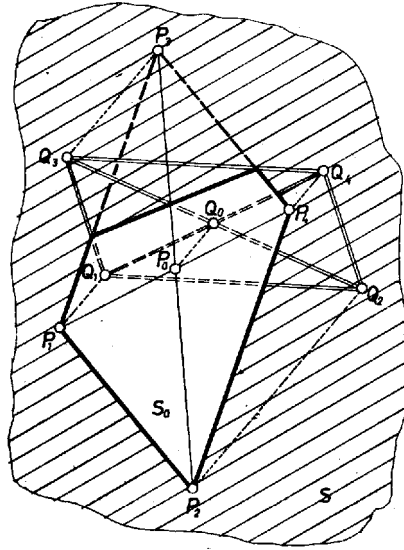


Tartsuk vízszintesen a $P_1P_2P_3P_4$ négyzet S_0 síkját, jelöljük G_i -vel a P_i körüli, i egységnyi sugarú gömböt ($i = 1, 2, 3, 4$). Az S_0 egy tetszőleges P pontjának egy S síktól mért előjeles távolságán magát a PQ szakaszt értjük, ahol Q a P vetülete S -en –, ha Q az S_0 fölött van, ha pedig Q az S_0 alatt van, akkor negatívnak tekintjük PQ -t. Jelöljük négyzetünk középpontját P_0 -lal, P_i -nek S -től mért előjeles távolságát $d_i(S)$ -sel, a P_iQ_i egyenest e_i -vel ($i = 0, 1, 2, 3, 4$). Bebizonyítjuk, hogy

$$(1) \quad d_1(S) + d_4(S) = d_2(S) + d_3(S),$$

annak belátásával, hogy mindkét oldal $2d_0(S)$ -sel egyenlő.



1. ábra

Az e_1 , e_4 és e_0 egyenesek párhuzamosak és metszik a P_1P_4 egyenest, egy síkban vannak és Q_0 nyilvánvalóan felezi a Q_1Q_4 -et (1. ábra), emiatt

$$\overrightarrow{P_0Q_0} = \overrightarrow{P_1Q_1} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{Q_1Q_4} - \overrightarrow{P_1P_4}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{P_1Q_1} + \overrightarrow{Q_1Q_4} + \overrightarrow{P_4P_1}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1Q_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{P_4Q_4} + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1Q_1},$$

vagyis

$$\overrightarrow{P_1Q_1} + \overrightarrow{P_4Q_4} = 2\overrightarrow{P_0Q_0}.$$

Innen

$$\begin{aligned} d_1(S) + d_4(S) &= 2d_0(S), & \text{és ugyanígy} \\ d_2(S) + d_3(S) &= 2d_0(S). \end{aligned}$$

Mivel P_i -nek S -től mért távolsága $|d_i(S)|$, azért S akkor és csakis akkor érinti G_i -t, ha

$$(2) \quad |d_i(S)| = i,$$

míg ha helyett

$$(3) \quad |d_i(S)| < i,$$

akkor S metszi G_i -t, ha pedig

$$(4) \quad |d_i(S)| > i,$$

akkor S -nek nincs közös pontja G_i -vel, kívül halad rajta.

Ha mármost S érinti – mondjuk – a G_1 , G_2 , G_3 gömböket, akkor d_1 , d_2 , d_3 abszolút értéke rendre 1, 2, 3 előjelek megválasztására pedig $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ lehetőségünk van. Persze négy gömb közül hármat még 3-féleképpen választhatunk, az így szóba jövő eseteket táblázatunkban mutatjuk be. Ebben csillag áll annak a d_i -nek a helyén, amelyik nem szerepel a választott és előjellel ellátott három között, a megfelelő gömbközpontnak a másik háromhoz tartozó érintősíktól mért távolságát (1) alapján a d -vel jelölt oszlopban adtuk meg, és ennek, valamint (2)–(4)-nek alapján azt is eldöntöttük, milyen a negyedik gömbnek és a választott három gömböt érintő síknak a kölcsönös helyzete.

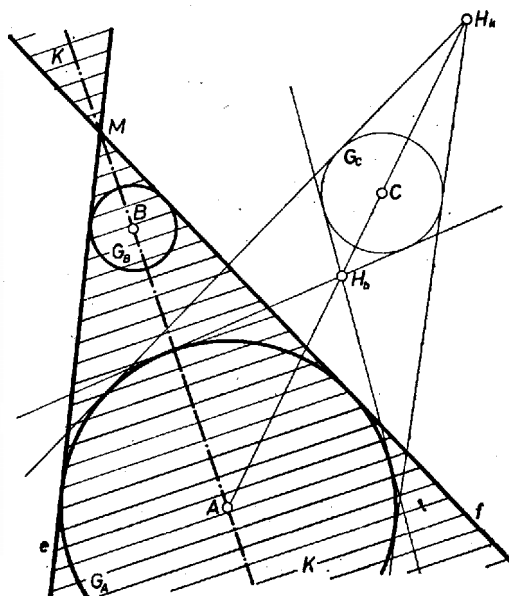
d_1	d_2	d_3	d_4	d	
1	2	3	*	4	érint
1	2	-3	*	-2	metsz
1	-2	3	*	0	metsz
1	-2	-3	*	-6	nem metsz
1	2	*	4	3	érint
1	2	*	-4	-5	nem metsz
1	-2	*	4	-7	nem metsz
1	-2	*	-4	-1	metsz
1	*	3	4	2	érint
1	*	3	-4	-6	nem metsz
1	*	-3	4	8	nem metsz
1	*	-3	-4	0	metsz
*	2	3	4	1	érint
*	2	3	-4	9	nem metsz
*	2	-3	4	-5	nem metsz
*	2	-3	-4	3	nem metsz

A táblázat 16 esetéből a hátralevő 16 esetet úgy kapjuk, hogy a megválasztott, illetve kiszámított számok mind-egyikét (-1) -gyel megszorozzuk (ezzel tulajdonképpen tükrözzük a mindenkori S -et S_0 -ra).

Négyszer kaptuk azt, hogy a negyedik gömb érinti a szóban forgó síkot, vagyis a sík mind a négy gömböt érinti, ez azonban egyetlen esetet jelent, azt, amikor az előjeles távolságok értéke rendre $(1, 2, 3, 4)$; így a táblázat 13 esetet jelent, összesen tehát $2 \cdot 13 = 26$, a feladatban kívánt tulajdonságú érintő sík lehet, ezek közül $2 \cdot 4 = 8$ metszi a negyedik gömböt, 2 pedig érinti a negyediket is.

Be kell még látnunk, hogy a táblázatban feltüntetett esetek mindegyikének pontosan egy sík felel meg. Ez könnyen következik az alábbi állításból.

Legyen A és B az S_0 sík tetszőleges pontja, és írjunk A körül a sugárral, B körül b sugárral egy-egy gömböt, jelöljük ezeket G_A -val és G_B -vel, az S_0 alkotott metszévonalukat k_A -val és k_B -vel. Tegyük fel, hogy k_A és k_B közül egyik sincs a másik belsejében, és nincs közös pontjuk. Rajzoljuk meg S_0 -ban k_A és k_B közös külső érintő egyeneseit, és jelöljük ezek metszéspontját M -mel, az általuk határolt szögtartományt, és annak M -re vonatkozó tükörképét K -val (2. ábra).



2. ábra

Legyen C az S_0 síknak olyan pontja, hogy a C köré c sugárral írt G_C gömbnek S_0 -on levő k_C , köre teljes egészében K -n kívül van. Akkor van olyan S^+ , illetve S^- -sík, amelynek az A, B, C pontoktól mért előjeles távolsága rendre (a, b, c) , illetve $(a, b, -c)$.

át a 4 gömb közös külső érintősíkja, ebben a hármásával vett tengelyek közül 4-esik egybe, másutt nincs tengelyek egybeesése. (Szemléletesen azt jelenti a közös érintősík létezése, hogy a 4 gömböt az előírt helyzetben egymáshoz rögzítve, a rendszer letehető síklapra úgy, hogy mind a 4 gömb támaszkodik a síkra.)