

I. Legyen a sorozat első tagja $a_1 = a$, differenciája d , továbbá a 0-tól $(n-1)$ -ig terjedő egész számok összege t_1 , négyzetösszegük t_2 , köbösszegük t_3 . Ekkor az i -edik tag $a_i = a + (i-1)d$ kifejezése alapján $i = 1, 2, \dots, n$ -re összegezve

$$(2) \quad s_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n = na + d[0 + 1 + \dots + (n-1)] = na + t_1 d,$$

és hasonlóan

$$(3) \quad \begin{aligned} s_2 &= a_1^2 + \dots + a_n^2 = na^2 + 2t_1 ad + t_2 d^2, \\ s_3 &= na^3 + 3t_1 a^2 d + 3t_2 ad^2 + t_3 d^3. \end{aligned}$$

Ezeket (1)-nek B bal oldalába helyettesítve az a -t, tartalmazó tagok kiesnek:

$$B = d^3(n^2 t_3 - 3n t_1 t_2 + 2t_1^3),$$

a zárójelben B -nek az a speciális értéke áll, ha $a = 0$ és $d = 1$.

Ismeretes másrészt, hogy

$$t_1 = \frac{(n-1)n}{2}, \quad t_2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{t_1(2n-1)}{3}, \quad t_3 = \frac{(n-1)^2 n^2}{4} = t_1^2,$$

ezekkel

$$B = d^3 t_1^2 \{n^2 - n(2n-1) + 2t_1\},$$

és a nagy zárójel értéke azonosan 0. Az állítást bebizonyítottuk.

II. Adatainkat (1)-behelyettesítve

$$67n^2 - 600n + 512 = 0,$$

amiből n egyik értéke tört, feladatunkban nem használható, a másik 8. Ezzel (2) és (3) így alakul:

$$(2') \quad \begin{aligned} 2a + 7d &= 2, \\ 4a^2 + 28ad + 70d^2 &= 25, \end{aligned}$$

és az első egyenlet négyzetét a másodikból kivonva

$$d^2 = 1, \quad d' = 1, \quad d'' = -1,$$

és így (2')-ből

$$a' = -2, 5, \quad a'' = 4, 5.$$

Az elsővel adódó sorozat tagjai:

$$-2, 5, \quad -1, 5, \quad -0, 5, \quad 0, 5, \quad 1, 5, \quad 2, 5, \quad 3, 5, \quad 4, 5,$$

a másodikkal ugyanezeket fordított sorrendben kapjuk.

Az s_3 adatot számításunknak csak kezdő szakaszában, n meghatározásában használtuk fel. S mivel közben n egyik értékét mellőztük, kézenfekvő, hogy s_3 értékét ellenőrizzük. Ezt megkönnyíti, hogy a 8 tagból 3 pár csak előjelben különbözik, s ez áll köbükre is, ezért

$$s_3 = 3,5^3 + 4,5^3 = \frac{1}{8}(7^3 + 9^3) = 134.$$

Ádám Margit (Szeged, Radnóti M. Gimn., III. o. t.)
Láng István (Székesfehérvár, Teleki B. Gimn., III. o. t.)