

A három egyenletet összeszorozva, az új egyenlet mindkét oldala teljes négyzet. Áttéve $x^2y^2z^2$ -et a jobb oldalra, a különbség szorzattá alakítható:

$$(4) \quad 0 = (z-a)^2(x-b)^2(y-c)^2 - x^2y^2z^2 = \{(z-a)(x-b)(y-c) - xyz\} \cdot \{(z-a)(x-b)(y-c) + xyz\} = E \cdot F,$$

eszerint a kapcsos zárójelbeli E , F tényezők valamelyikének az értéke 0. Először azt az esetet tekintjük, ha az első zárójelbeli $E = 0$.

I. Ebből kiindulva és az xy szorzatot (1) alapján egymás után kétszer $(z-a)^2$ -nel helyettesítve:

$$0 = (z-a)(x-b)(y-c) - z(z-a)^2 = (z-a)\{xy - cx - by + bc - z(z-a)\} = \\ = (z-a)(-az + a^2 - cx - by + bc),$$

ami ismét két módon teljesülhet: vagy $z = a$ esetén vagy pedig ha

$$(5) \quad cx + by + az = a^2 + bc.$$

Tüstént látjuk azonban, hogy a $z = a$ lehetőség csak bizonyos a, b, c paraméter-rendszerek mellett vezet megoldásra, hiszen így (1) alapján x és y egyike 0, tehát (3) vagy (2) mindkét oldala 0, márpedig

$$(6) \quad \begin{cases} z = a, & x = 0, & y = c & \text{csak akkor megoldás, ha (2)-ben } ac = b^2, \\ z = a, & y = 0, & x = b & \text{csak akkor megoldás, ha (3)-ban } ab = c^2. \end{cases}$$

Folytatva az első esetet, E -ben előbb (2) alapján yz -t, majd (3) alapján zx -et kifejezve, az előbbiekhöz hasonlóan

$$(7) \quad bx + ay + cz = b^2 + ac,$$

$$(8) \quad az + cy + bz = c^2 + ab.$$

Adódott közben az $x-b=0$, ill. $y-c=0$ lehetőség is E -nek 0-vá tevésére, ezek mindegyike ismét megadja (6) egyikét, továbbá mindkettő adja (6) mellé harmadikként a következő esetleges megoldást:

$$(6') \quad x = b, \quad z = 0, \quad y = c, \quad \text{akkor, ha (1)-ben } bc = a^2.$$

Ezek szerint ismeretleneinkre az (5), (7) és (8) egyenletekből álló lineáris egyenletrendszernek kell teljesülnie. Adjuk hozzá (5)-höz (7)-nek valamely λ számmal és (8)-nak valamely μ számmal való szorzatát:

$$(9) \quad (c + b\lambda + a\mu)x + (b + a\lambda + c\mu)y + (a + c\lambda + b\mu)z = (a^2 + bc) + (b^2 + ac)\lambda + (c^2 + ab)\mu,$$

és határozzuk meg λ -t és μ -t úgy, hogy innen y és z egyidejűen kiessék, azaz legyen

$$a\lambda + c\mu + b = 0 \text{ és } c\lambda + b\mu + a = 0,$$

amiből

$$\lambda = \frac{b^2 - ac}{c^2 - ab}, \quad \mu = \frac{a^2 - bc}{c^2 - ab},$$

hacsak $c^2 - ab \neq 0$. Ezekkel (9)-ben x együtthatója és a jobb oldal értéke rendre

$$c + \frac{b(b^2 - ac) + a(a^2 - bc)}{c^2 - ab} = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{c^2 - ab}, \quad \text{illetőleg} \\ \frac{1}{c^2 - ab} \{(a^2 + bc)(c^2 - ab) + (b^2 + ac)(b^2 - ac) + (c^2 + ab)(a^2 - bc)\} = \frac{(b^2 - ac)^2}{c^2 - ab}.$$

Eszerint y -t és z -t hasonlóan kiszámítva az (5), (7), (8) rendszer egyértelmű megoldása csak a következő lehet:

$$(10) \quad x = \frac{(b^2 - ac)^2}{D}, \quad y = \frac{(c^2 - ab)^2}{D}, \quad z = \frac{(a^2 - bc)^2}{D},$$

ahol

$$D = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc,$$

és természetesen $D \neq 0$.

Könnyű észrevenni a (10)-beli számlálókról, hogy rendre azok mellett a feltételek mellett adnak 0-t, amelyeket (6)-ban, ill. (6')-ben láttunk, és egyszerű számítás mutatja, hogy az ottani feltételek mellett (10) éppen rendre az ott látott három megoldást adja.

Megmutatjuk, hogy ha $D = 0$, akkor az (1)–(3) rendszernek nincs egyértelmű megoldása; részletesebben: vagy végtelen sok megoldása van, vagy egyáltalán nincs megoldása. (Természetesen *valós* megoldásra gondolunk, másrészt még mindig olyan megoldásokra, amelyek mellett (4)-ben $E = 0$, hiszen ezek ekvivalensek az (5), (7), (8) rendszer megoldásaival.) Felhasználjuk, hogy D szorzattá alakítható:¹

$$(11) \quad \begin{aligned} D &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}. \end{aligned}$$

α) A második tényező akkor és csak akkor 0, ha $a - b = b - c = c - a = 0$, azaz ha $a = b = c$. Ekkor, ha még $a = 0$ is teljesül, az eredeti (1)–(3) egyenletrendszert nyilvánvalóan minden $x = y = z$ értékrendszer kielégíti, és E is 0. Ha pedig $a > 0$, akkor az (5), (7), (8) egyenletek mindegyike így egyszerűsödik:

$$a(x + y + z) = 2a^2, \quad \text{ill.} \quad x + y + z = 2a.$$

Innen $z = 2a - x - y$ helyettesítéssel (1)–(3) mindegyike erre vezet:

$$(12) \quad y^2 - (2a - x)y + (a - x)^2 = 0,$$

és az ezt kielégítő y -ok valósak, ha diszkriminánsa:

$$(4a - 3x)x \geq 0, \quad \text{azaz ha} \quad 0 \leq x \leq \frac{4a}{3}.$$

Így választva x -et, z is valós. (Teljesül $y \geq 0$ is (12) mindkét megoldására, mert összegük: $2a - x > 0$ és szorzatuk: $(a - x)^2 \geq 0$. Így pedig $z \geq 0$ is teljesül; ugyanis (12) két megoldásának számtani közepe $(y_1 + y_2)/2 = m = (2a - x)/2 = a - x/2 \leq a$, a kisebbik megoldás, y_1 , a $(0, m)$ intervallumba esik, mert $y = 0$ mellett (12) bal oldala ≥ 0 , ezért y_2 az intervallumnak m -re való tükröképébe esik: $y_2 \leq 2m = 2a - x \leq 2a$, tehát evvel is $y_2 + x \leq 2a$, $z \geq 0$.)

Az $a > 0$ eset eredményéből már $a < 0$ esetére is következik, hogy végtelen sok (valós) megoldás van. Ha ugyanis az $xy = (z - a)^2$, $yz = (x - a)^2$, $zx = (y - a)^2$ rendszernek egy megoldása x_1, y_1, z_1 akkor a helyére $(-a)$ -t írva a rendszert kielégíti $x_2 = -x_1, y_2 = -y_1, z_2 = -z_1$, így ugyanis $x_2 y_2 = x_1 y_1 = (z_1 - a)^2 = (-z_2 - a)^2 = (z_2 + a)^2$ s i. t.

Kézenfekvő itt megvizsgálni egy főntebb függőben maradt kérdést. A λ és μ számokkal végzett kiküszöbölés érvényességének feltétele ez volt: $c^2 - ab \neq 0$. Ha $c^2 - ab = 0$, akkor y és z kiküszöbölése helyett próbálkozhatunk x és z , vagy pedig x és y hasonló, egyidejű kiküszöbölésével, ugyancsak (9)-ből. Ennek feltételül hasonlóan ezt kapjuk: $b^2 - ac \neq 0$, ill. $a^2 - bc \neq 0$. Ha viszont e három kifejezés mindegyike 0-val egyenlő, akkor összegük is 0, és ez az összeg éppen a (11)-beli második tényező. – Emiatt volt szükség arra, hogy a második tényező eltűnése esetére a megoldást mintegy újra kezdjük az (5), (7), (8) rendszerből.

β) Ha viszont $D = 0$ amiatt teljesül, mert (11) első tényezőjére áll fenn $a + b + c = 0$ – de ez nem úgy adódik, hogy $a = b = c = 0$, hiszen ezt az esetet már láttuk –, akkor az (1)–(3) rendszernek nincs olyan megoldása, amelyre (5), (7), (8) is teljesül. Ugyanis összeadva az (5), (7), (8) egyenleteket, teljesülnie kellene ennek:

$$(a + b + c)(x + y + z) = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca,$$

ámde itt a bal oldal 0, a jobb oldal viszont az $a = b = c = 0$ eset kizárása folytán

$$\frac{1}{2}\{(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2\} = \frac{1}{2}\{(-c)^2 + (-a)^2 + (-b)^2\} > 0.$$

Ezzel az $E = 0$ eset vizsgálatát befejeztük.

II. Ha (4)-ben $F = 0$, azaz

$$(13) \quad (z - a)(x - b)(y - c) + xyz = 0,$$

ezt a fentiekhez hasonlóan alakítva olyan egyenleteket kapunk, amelyek csak két ismeretlenre nézve elsőfokúak, a harmadikra nézve másodfokúak, pl.

$$0 = F = (z - a)\{2z^2 - 3az - cx - by + a^2 + bc\}.$$

Ebben az esetben a rendszert általában nem tudjuk megoldani, mert pl. y és z kiküszöbölésével x -re 2-nél magasabb fokú egyenlet adódik. (Adott, numerikus a, b, c értékek mellett rendszeres próbálgatás útján közelítő megoldást lehet keresni.) Az sem segít a megoldáshoz, hogy az $a = b = c$ speciális esetben ismerjük (13)-nak egy megoldását: $x = y = z = a/2$.

Megjegyzés. Sajnálatos, hogy a II. eset megoldhatatlansága miatt több – igényes – versenyző egyáltalán nem küldött dolgozatot.

¹Lásd pl.: *Faragó L.*: Matematikai szakköri feladatgyűjtemény. 3. kiadás. Tankönyvkiadó. Budapest 1963. 27. feladat.