

I. Megoldás. A harmadik gyökjel alatti kifejezés $(10 - x - y)^2 + 2^2$ alakban írható, az első két tag eleve két négyzet összege. A vizsgált összeg három tagja tehát rendre a derékszögű koordinátarendszer

$$u(x, 1), \quad v(y, 3), \quad w(10 - x - y, 2)$$

koordinátájú vektorainak a hossza. A vizsgált $K(x, y)$ függvény értéke tehát

$$(1) \quad K(x, y) = |u| + |v| + |w|,$$

ahol az abszolút érték jel most az egyes vektorok hosszát jelöli. E három vektor

$$(2) \quad a = u + v + w$$

$a(10; 6)$ összegének koordinátái nem függenek az x, y változóktól. Megmutatjuk, hogy $K(x, y)$ minimuma egyenlő az a vektor hosszával, $\sqrt{136}$ -tal.

Tekintsük a $z = u + v$ összeg szokásos előállítását. Ha u és v állása különböző, az egymáshoz csatlakozó u és v vektorok egy háromszöget határoznak meg, melyben a z vektornak megfelelő oldal hossza kisebb az u és v vektoroknak megfelelő oldal hosszának összegénél:

$$|z| = |u + v| < |u| + |v|.$$

Ha u és v állása megegyezik, akkor

$$|z| = |u| + |v| \quad \text{vagy} \quad |z| = ||u| - |v||$$

aszerint, hogy u és v iránya megegyezik-e vagy ellentétes. Ezek szerint mindig helyes az

$$(3) \quad |u + v| \leq |u| + |v|$$

egyenlőtlenség, és ebben az egyenlőség akkor és csakis akkor érvényes, ha u és v állása és iránya megegyezik.

Alkalmazzuk (3)-at a z és w vektorokra:

$$|z + w| \leq |z| + |w|,$$

azaz

$$|u + v + w| \leq |u + v| + |w|.$$

(3) alapján ebből az

$$|u + v + w| \leq |u + v| + |w| \leq |u| + |v| + |w|$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Az első egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha z és w állása és iránya megegyezik, a második pedig, ha u és v állása és iránya megegyezik. Az utóbbi esetben z állása és iránya megegyezik u és v állásával és irányával, tehát mindkét helyen akkor és csakis akkor teljesül az egyenlőség, ha az u, v, w vektorok állása és iránya megegyezik. Ezek szerint tetszőleges u, v, w vektorra érvényes az

$$(4) \quad |u + v + w| \leq |u| + |v| + |w|$$

egyenlőtlenség, ahol az egyenlőség akkor és csak akkor érvényes, ha u, v, w állása és iránya megegyezik.

Összegezve a kapott eredményeket, (1), (2) és (4) szerint

$$K(x, y) = |u| + |v| + |w| \geq |u + v + w| = |a| = \sqrt{136}.$$

Itt az egyenlőség csak akkor érvényes, ha u, v, w állása és iránya megegyezik a állásával és irányával, azaz

$$u = \lambda a, \quad v = \mu a, \quad w = \nu a,$$

ahol λ, μ, ν alkalmas pozitív számok. A második koordináták összehasonlítása alapján ebből $\lambda = 1/6, \mu = 1/2, \nu = 1/3$ következik, így az első koordináták alapján

$$(5) \quad x = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}; \quad y = \frac{10}{2} = 5.$$

Tehát a $K(x, y)$ függvény minimuma $\sqrt{136}$, melyet az (5) alatti értékek mellett (és csakis ezek mellett) vesz fel.

II. megoldás. Rögzítsük először y értékét, legyen mondjuk $y = y_0$, és vizsgáljuk meg, hol veszi fel az

$$f(x) = K(x, y_0) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y_0^2 + 9} + \sqrt{x^2 + y_0^2 - 20x - 20y_0 + 2xy_0 + 104}$$

egyváltozós függvény a minimumát. E függvény mindenütt értelmezve van, hiszen a harmadik gyökjel alatti mennyiség is határozottan pozitív

$$x^2 + y_0^2 - 20x - 20y_0 + 2xy_0 + 104 = (x - 10 + y_0)^2 + 4.$$

Ha e függvény deriváltja,

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{x - 10 + y_0}{\sqrt{x^2 + y_0^2 - 20x - 20y_0 + 2xy_0 + 104}}$$

0-val egyenlő, akkor

$$(6) \quad x^2(x^2 + y_0^2 - 20x - 20y_0 + 2xy_0 + 104) = (x^2 + 1)(x - 10 + y_0)^2.$$

Egyenletünk mindkét oldalából $x^2(x - 10 + y_0)^2$ -t levonva a

$$4x^2 = (x - 10 + y_0)^2$$

egyenletet kapjuk, melynek gyökei vagy a

$$(7a) \quad 2x = x - 10 + y_0$$

vagy a

$$(7b) \quad -2x = x - 10 + y_0$$

egyenlet gyökei, azaz $x = y_0 - 10$ vagy $x = (10 - y_0)/3$.

Ha $y_0 = 10$, akkor e két gyök egyenlő. A (7a)-ból kapott gyök mellett $f'(x)$ nem lehet 0, hiszen (7a) szerint $f'(x)$ eredeti alakjában a két tört számlálójának megegyezik az előjele (és e számlálók 0-tól különbözőek), a nevezők pedig pozitívak. Tehát $f'(x)$ csak a (7b) egyenlet

$$(8) \quad x_0 = \frac{10 - y_0}{3}$$

gyöke mellett lehet 0.

Ha $y_0 = 10$, akkor $f'(x)$ eredeti alakjában mindkét tört számlálója 0, tehát $f'(x_0) = 0$. Ha $y_0 \neq 10$, akkor $x_0 \neq 0$, és mivel (8) gyöke (6)-nak, azért

$$(9) \quad \frac{x_0^2 + y_0^2 - 20x_0 - 20y_0 + 2x_0y_0 + 104}{x_0^2 + 1} = \left(\frac{x_0 - 10 + y_0}{x_0} \right)^2 = 4.$$

Tehát $f'(x)$ eredeti alakjában x helyére x_0 -t helyettesítve, a második tört nevezője az első tört nevezőjének 2-szerese, viszont (7b) szerint a második tört számlálója az első számlálójának (-2) -szerese, így $f'(x_0)$ értéke 0. Az $f(x)$ függvény második deriváltja,

$$f''(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}} + \frac{4}{(x^2 + y_0^2 - 20x - 20y_0 + 2xy_0 + 104)^{3/2}},$$

mindenütt pozitív, tehát $f(x)$ -nek $x = x_0$ mellett minimuma van. E minimális érték kiszámítását megkönnyíti a (9) összefüggés, eszerint

$$f(x_0) = 3\sqrt{x_0^2 + 1} + \sqrt{y_0^2 + 9} = \sqrt{(10 - y_0)^2 + 9} + \sqrt{y_0^2 + 9}.$$

Átfogalmazva eredményünket, az eredeti $K(x, y)$ függvényre kapjuk, hogy

$$K(x, y) \geq \sqrt{(10 - y)^2 + 9} + \sqrt{y^2 + 9},$$

és az egyenlőség akkor érvényes, ha $x = (10 - y)/3$. A $K(x, y)$ függvény minimuma tehát egyenlő a

$$g(y) = \sqrt{(10 - y)^2 + 9} + \sqrt{y^2 + 9}$$

függvény minimumával. E függvény

$$g'(y) = \frac{y - 10}{\sqrt{(10 - y)^2 + 9}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 9}}$$

deriváltja akkor egyenlő 0-val, ha

$$(10 - y)^2(y^2 + 9) = y^2[(10 - y)^2 + 9],$$

azaz

$$9(10 - y)^2 = 9y^2.$$

Ebből ismét csak a

$$10 - y = y$$

egyenlet gyöke jöhet szóba, különben a $g'(y)$ -ban szereplő két tört egyenlő előjelű volna. Behelyettesítéssel kapjuk, hogy $y = 5$ mellett $g'(y)$ valóban 0, a második derivált

$$g''(y) = \frac{9}{[(10-y)^2 + 9]^{3/2}} + \frac{9}{(y^2 + 9)^{3/2}}$$

ismét mindenütt pozitív, tehát

$$K(x, y) \geq g(y) \geq g(5) = 2\sqrt{34}.$$

A $K(x, y)$ függvény minimuma tehát $2\sqrt{34}$, és ezt az

$$y = 5, \quad x = 5/3$$

értékpár mellett veszi fel.