

I. megoldás. Ebben a feladatban számon mindig természetes számot értünk, és betűvel is mindig ilyet jelölünk.

Van 8-asra végződő köbszám: a $2^3 = 8$; és minden a 2-essel végződő szám köbe 8-assal végződik, mert ha egy x alap egyeseinek száma e , akkor x^3 -ben annyi egyes van, mint e^3 -ben:

$$x^3 = (10t + e)^3 = (100t^3 + 30t^2e + 3te^2) \cdot 10 + e^3.$$

Más végződés nem is felelhet meg esetünkben, mert, ha $e \neq 2$, akkor e^3 végén nem 8-as áll.

Hasonlóan, ha két szám n -jegyű végződése ($n \geq 2$) ugyanaz az A szám ($A < 10^n$), vagyis $N_1 = B_1 \cdot 10^n + A$ és $N_2 = B_2 \cdot 10^n + A$, akkor köbük n jegyű végződése is egyezik, mert különbségük végén legalább n db 0 áll:

$$N_1^3 - N_2^3 = (N_1 - N_2)(N_1^2 + N_1N_2 + N_2^2) = (B_1 - B_2)(N_1^2 + N_1N_2 + N_2^2) \cdot 10^n.$$

Legyen A_n olyan (legfőljebb) n jegyű alap ($n \geq 1$), melynek köbében az utolsó n jegy 8-as, és az ezeket közvetlenül megelőző számjegy (a 10^n értékű helyen) k ; ekkor az előzők alapján várható, hogy találunk az alap elé a 10^n értékű helyre olyan a számjegyet, hogy az $A_{n+1} = a \cdot 10^n + A_n$, legfőljebb $n + 1$ jegyű szám köbének végén (legalább) $n + 1$ db 8-as álljon.

$$A_{n+1}^3 = a^3 \cdot 10^{3n} + 3a^2 A_n \cdot 10^{2n} + 3a A_n^2 \cdot 10^n + A_n^3,$$

és itt $n \geq 1$ miatt $10^{2n} > 10^n$, így a 10^n értékű helyre csak az utolsó két tag adhat 0-tól különböző jegyet. Az utolsó tag k -t adja, az előtte álló tag pedig $3aA_n^2$ utolsó jegyét. Mivel A_n utolsó jegye 2, azért A_n^2 -é 4, így a mondott számjegy $12a$ -nak utolsó jegye, ami ugyanaz, mint $2a$ utolsó jegye. Eszerint követelésünk, az esetleges tízes átvitel figyelembevételével így alakul:

$$2a + k = 8 \text{ vagy } 18$$

(hiszen $a + a + k \leq 27$), eszerint megfelel

$$(1) \quad a = 4 - \frac{k}{2} \quad \text{vagy} \quad 9 - \frac{k}{2},$$

főltéve természetesen, hogy k páros számjegy.

Mármint $A_1 = 2$ köbében $k = 0$, így $a = 4$ vagy 9, tehát A_2 -ként 42 és 92 adódik. Köbük háromjegyű végződése 088, ill. 688, azaz $k = 0$, ill. 6, az elsőhöz $a = 4$ és 9 adódik, a másodikhoz $a = 1$ és 6.

Az így kapott $A_3 = 442$ és 942, valamint 192 és 692 köbének 4 jegyű végződése rendre 0888, 6888, 7888, 3888, az utóbbi kettőhöz nem tartozik a -érték, az előbbi kettőből pedig ezek jönnek szóba:

$$A_4 = 4442, \quad 9442, \quad 1942, \quad 6492.$$

Köbük jobbról számított 5-ik számjegye rendre 1, 7, 8, 4 (utána pedig 4 db 8-as), így az első kettőt el kell hagynunk, és

$$A_5 = 01942, \quad 51 \ 942, \quad 26 \ 942, \quad 76 \ 942,$$

és hasonlóan az utolsó kettőből, $k = 2$, ill. 8 alapján az

$$A_6 = 326 \ 942, \quad 826 \ 942, \quad 076 \ 942, \quad 576 \ 942$$

számok köbe 6 db 8-asra végződik (és a harmadik szám lényegében csak ötjegyű). Eszerint a feladat kérdésére a válasz igenlő.

A köbre emeléseket ismételt szorzással végeztük, de mindig csak annyi számjegyre a végétől számítva, amennyire éppen szükség volt, pl. $A_3 = 192$ esetében

$$\begin{array}{r} \underline{192} \times 192 \\ 384 \\ \dots 728 \\ \underline{\dots 92} \\ \dots 6864 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{6864} \times 192 \\ 3728 \\ \dots 776 \\ \underline{\dots 64} \\ \dots 7888 \end{array}$$

Mivel lépésről lépésre kaptuk a következő (azaz megelőző) számjegyet, eljárásunk nem bizonyítja, hogy bármely n -hez létezik n db 8-asra végződő köbszám. Azt azonban látjuk, hogy $n = 6$ -hoz a talált A_6 -kon kívül más (legfőljebb hatjegyű) szám nem felel meg.

Kertész András (Budapest, Berzsényi D. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. Nem nehéz kiegészíteni a fentieket az utoljára említett bizonyítással, ezért vázoljuk $n = 3$ esetére. Vegyük észre, hogy a talált A_3 értékeket növekvően rendezve számtani sorozatot kapunk $d = 250$ -es differenciával: 192, 442, 692, 942 (aminek ez a magyarázata: az A_2 értékek különbsége (1) miatt 50, továbbá 92-höz 6-tal nagyobb k

adódott, mint 42-höz, ezért a 92 elé (1) miatt $6/2 = 3$ -mal kisebb százaz jegyek kerültek). A hozzájuk talált k értékekre is ugyanaz áll $d = 3$ mellett: 7, 0 (azaz 10), 3, 6. Valóban,

$$\begin{aligned}(192 + 250c)^3 &= 7\,077\,888 + 27\,648 \cdot 10^3 c + 36 \cdot 10^6 c^2 + 15\,625 \cdot 10^3 c^3 = \\ &= (707 + 2764c + 3600c^2 + 1562c^3) \cdot 10^4 + 5c(1 + c^2) \cdot 10^3 + (7 + 3c)10^3 + 888,\end{aligned}$$

és itt $c(1 + c^2)$ páros, a második tag is többszöröse 10^4 -nek, tehát a 10^3 értékű helyen $7 + 3c$ utolsó jegye adódik k -ként, $c = 0, 1, 2, 3$ mellett. Tehát páratlan c esetén k páros, viszont páros c mellett páratlan, így esett ki a további keresésből az egymástól $2 \cdot 250 = 500$ -zal különböző 192 és 692 és megmaradt az ugyancsak 500-zal különböző 442 és 942.

Teljes indukcióval ennek mintájára bizonyítható, hogy minden négy db A_n -ből kettő kiesik, a maradék kettőben a nagyobbikhoz tartozó k a másiknál 6-tal nagyobb, és belőlük ismét négy db A_{n+1} adódik, $25 \cdot 10^{n-1}$ differenciával. Felhasználjuk azt is, hogy $n \geq 4$ esetén A_n páros, de nem osztható 4-gyel.

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy bármely n -hez van olyan legfőljebb n jegyű E_n szám, hogy E_n^2 végén n db 1-es áll. Ebből már következik, hogy van olyan N_n is, hogy N_n^3 végén n db 8-as áll, hiszen $N_n = 2E_n$ köbének, $8E_n^3$ -nek végén legalább annyi 8-as áll, mint ahány 1-esre (E_n^2 végződik (akkor több 1-gyel, ha a köb 1-esei előtt 6 áll, vagy 36, vagy 13; megfordítva viszont nem mindig teljesül, hogy n db 8-asra végződő köbszám 8-adrésze n db 1-esre végződik, hiszen pl. az I. megoldásbeli $A_3 = 192$ és 692-nek a fele páros, vagy $A_5/2 = 971$ -nek a köbében a várható 5-nél kevesebb az 1-esek száma $971^3 = \dots 611$).

Nyilvánvalóan $E_1 = 1$, és csak 1-esre végződő E_n -ekről lehet szó. Legyen az I. megoldáshoz hasonlóan E_n^3 -nek a 10^n értékű helyen álló jegye k^* , és keressük $E_{n+1} = a^* \cdot 10^n + E_n$ -ben a^* -ot úgy, hogy E_n köbében a 10^n értékű helyen is 1-es álljon:

$$E_{n+1}^3 = a^{*3} \cdot 10^{3n} + 3a^{*2} \cdot E_n \cdot 10^{2n} + 3a^* E_n^2 \cdot 10^n + E_n^3,$$

ennek a 10^n értékű helyen álló számjegyre pedig

$$3a^* + k^* = 1 \text{ vagy } 11 \text{ vagy } 21 \text{ vagy } 31$$

mindenesetre teljesül (hiszen E_n^2 utolsó jegye 1-es) és pedig rendre az

$$(2) \quad a^* = \frac{1 - k^*}{3}, \quad 3 - \frac{k^* - 2}{3}, \quad 7 - \frac{k^*}{3}, \quad 10 - \frac{k^* - 1}{3}$$

értékkel aszerint, hogy $k^* = 1$, ill. $k^* \neq 1$ esetén ezt 3-mal osztva a maradék 2, 0, ill. 1.

Ezzel beláttuk, hogy akárhány 1-esünk volt egy köbszám végén, kaphatunk hozzá olyan köböt, melynek végén (legalább) 1-gyel több az 1-esek száma, ennél fogva a 8-asokra is ugyanez áll.

$$E_1^3 = 1 = 01\text{-ben } k^* = 0 \text{ és (2) szerint } a^* = 7;$$

$$E_2^3 = 71^3 = \dots 911\text{-ben } k^* = 9, a^* = 4;$$

$$E_3^3 = 471^3 = \dots 7111\text{-ben } k^* = 7, a^* = 8,$$

$$E_4^3 = 8471^3 = \dots 71\,111\text{-ből } a^* = 8,$$

$$E_5^3 = 88\,471^3 = \dots 511\,111\text{-ől } a^* = 2,$$

és így $2E_6 = 2 \cdot 288\,471 = 576\,942$ köbének végén a 8-asok száma legalább 6.

Ez az eljárás kevesebb számolással jut eredményhez, mint az I. megoldásbeli, mert minden lépésben csak egy E_n számot ad. Pl. E_2 -ből $2E_2 = 142$ útján csak a fenti $A_2 = 42$ érték adódik ki, a később (A_4 keresésében) kieső $A_2 = 92$ nem. Ugyanígy az $A_2 = 42$ -ből adódott, de az A_5 keresésekor kiesett $A_3 = 442$ sem adódik ki itt, s i. t.

Reviczky János (Budapest, I. István Gimn., II. o. t.)