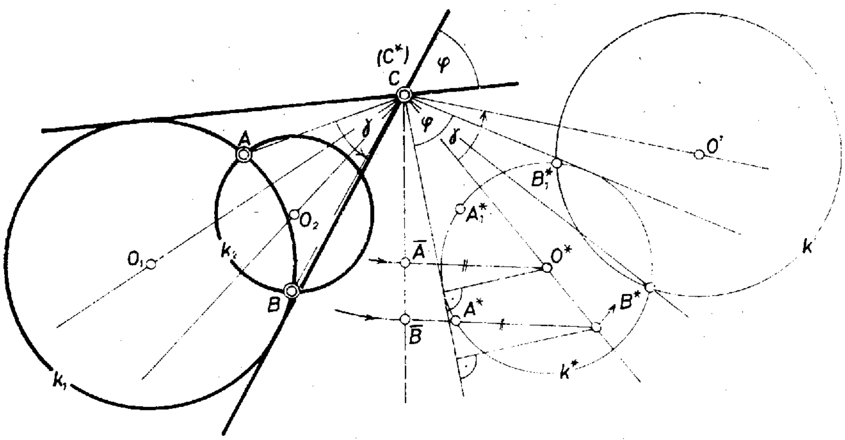
I. megoldás. Legyenek az adott helyzetű pontok A, B és C úgy, hogy C-ből a keresett, O középpontú k kör látószöge az adott φ szög, és k átmegy A-n és B-n. Válasszuk az egyező szerepű A és B betűzését úgy, hogy $CB \geqq CA$ legyen.

Az A, B, C pontokból és a keresett k-ból álló alakzathoz hasonlót szerkeszthetünk, ha először a C-nek és k-nak megfelelő C^* és k^* elemeket vesszük fel. Ekkor ugyanis csak a k^* körön kell megkeresnünk azt az A^*, B^* pontpárt, amelyre az $A^*B^*C^*$ háromszög hasonló ABC-hez. Ha az eredeti háromszögben az AC szakaszt a C centrumból $BC : AC$ arányban megnyújtjuk, majd C körül a $\gamma = ACB$ szöggel elforgatjuk, a szakasz átmegy a BC szakaszba, az A csúcs B-be megy át. Azt is mondhatjuk eszerint, hogy a k^* körnek azt az A^* pontját keressük, amelyet a C^* centrumú, $BC : AC$ arányú nagyítás és az ezt követő, C^* körüli γ nagyságú forgatás k^* valamely B^* pontjába visz át.

Márpedig az A^* pont B^* képét megszerkeszthetjük úgy, hogy a C^* centrumból az egész k^* kört $BC : AC$ arányban megnagyítjuk, majd a kapott kört γ-val elforgatjuk. S mivel B^*-nak az így kapott k' körön is rajta kell lennie, az csak k és k' valamelyik közös pontja lehet. – Kevesebb lépest kell végeznünk, ha C^*-nak magát C-t választjuk.



1. ábra

A szerkesztés végrehajtása (1. ábra): egy C csúcsú, φ nagyságú szögben tetszőleges, a szárakat érintő k^* kört veszünk fel, majd ezt $CB : CA$ arányban nagyítjuk és γ szöggel elfordítjuk, az irányt is megtartva. A kapott k' kör által k^*-ból kimetszett B_1^* (majd a B_2^*) pontot B-be transzformáló forgatva nyújtás k^*-ból a keresett k_i-t állítja elő, O_i középpontjának helyzete a következőkből kapható:

$$O_iCB\sphericalangle = O^*CB_i^*\sphericalangle, \quad \text{és} \quad CO_i = CO^* \cdot \frac{CB}{CB_i^*} \quad (i = 1,\, 2).$$

Szerkesztésünk helyes, mert B^*-ot – mint k' bármely pontját – a γ szöggel való visszaforgatás, és az ezt követő $AC : BC$ arányú, C^* centrumú kicsinyítés k^* valamely pontjába viszi, jelöljük ezt most is A^*-gal. Így az $A^*B^*C^*$ háromszög hasonló ABC-hez, és C^*-ból k^* az adott φ szög alatt látszik. Tehát az a hasonlóság, amely $A^*B^*C^*$-ot ABC-be viszi, a k^*-ot olyan k-ba viszi, amely C-ből φ szög alatt látszik.

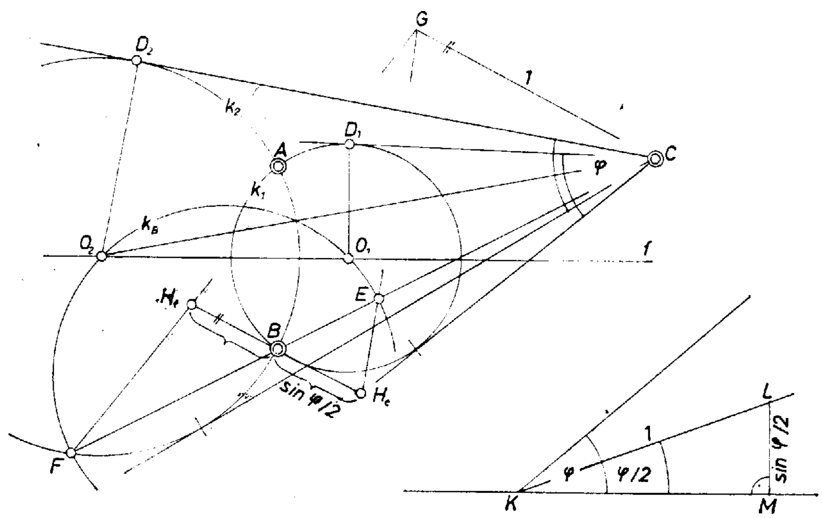
A megoldások száma k^* és k' közös pontjai számának megfelelően 2, 1 vagy 0. (Szükséges feltétel, hogy $\varphi \geqq \gamma$ legyen – és ha itt egyenlőség áll, akkor $CA = CB$ mellett 1 közös pontja van k^*-nak k'-vel, különben nincs; azonban $\varphi > \gamma$ esetén is előfordulhat a nyújtási aránytól függően, hogy nincs közös B^* pont).

Szendrei Ágnes (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn.)

II. megoldás. Az I. megoldás jelöléseit tovább használjuk, legyen továbbá a C-ből k-hoz húzott egyik érintő érintési pontja D. Ekkor a CO_iD_i derékszögű háromszögből ($i = 1,\, 2$) (2. ábra)

$$O_iB = O_iD_i = O_iC\sin\frac{\varphi}{2}, \qquad O_iC : O_iB = 1 : \sin\frac{\varphi}{2},$$

tehát O_i rajta van a B, C alappontokhoz és az $1 : \sin\dfrac{\varphi}{2} = \lambda$ arányszánihoz tartozó k_B Apollóniosz–körön.



2. ábra

O_i-nak másik mértani helye az AB szakasz f felező merőlegese, tehát O_i-t k_B-ből f metszi ki. A szerkesztés helyességének bizonyítását ezúttal az olvasóra hagyjuk.

(A k_B kör BC egyenesre eső FE átmérőjének végpontjait úgy szerkesztettük, hogy a C-n és B-n át tetszőleges irányú párhuzamosra felmértük a $CG = KL$, ill. $BH_e = BH_f = LM$ szakaszt (az utóbbiakat CG-vel egyező, ill. ellentétes irányban), ahol KLM a segédábra derékszögű háromszöge és $MKL\sphericalangle = \varphi/2$, és GH_e-vel, GH_f-fel kimetszettük E-t, F-et.)