**I. megoldás.** Minthogy a leírt (első) szerkesztéssel egy, magán az $AB$ egyenesen fekvő pontot jelölünk ki, azért lényegtelen, hogy a trapézt az $AB$ oldal fölé kifelé vagy befelé szerkesztjük.

Látni fogjuk, hogy $C^*$ azonos az $ABC$ háromszög $C$-ből induló magasságának $C_1$ talppontjával, és a betűzés kellő megváltoztatásával hasonló állítás adódik $A^*$-ra és $B^*$-ra. Ebből következik, hogy a $C^*$, $A^*$, $B^*$ pontokban felállított merőlegesek a háromszög magasságvonalai, tehát az állítás igaz, és élesebben ezt mondhatjuk: a merőlegesek a háromszög magasságpontjában metszik egymást. A mondott azonossághoz elég azt megmutatni, hogy $C_1$ egyenlő távolságra van $A''$-től és $B'$től: Valóban, az $A''C_1A$, $CAC_1$, $CBC_1$ és $B'C_1B$ derékszögű háromszögek, valamint a föltevések alapján

$$\begin{aligned} A''C_1^2 &= A''A^2 + AC_1^2 = BC^2 + (-CC_1^2 + AC^2) = \\ &= (BC^2 - CC_1^2) + B'B^2 = BC_1^2 + BB'^2 = B'C_1^2, \end{aligned}$$

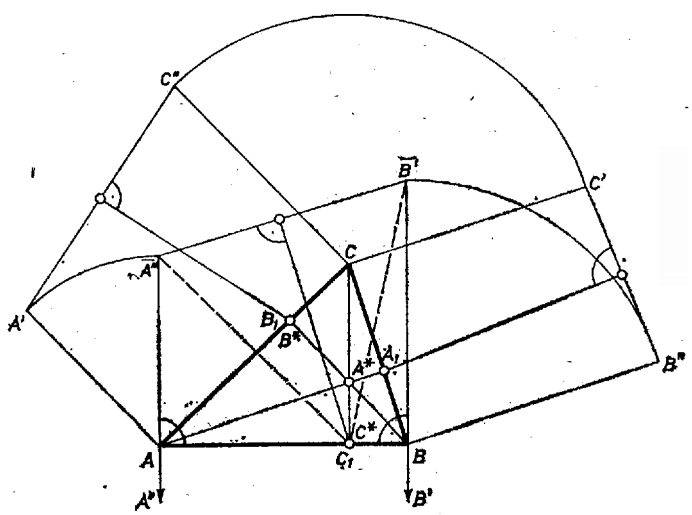
tehát, mivel puszta távolságokról van szó, $A''C_1 = B'C_1$.

Meggondolásunk akkor is érvényes, ha $C_1$ azonosnak adódik $A$-val vagy $B$-vel. Ezzel az előrebocsátottak szerint az állítást bebizonyítottuk.

*Hadik Róbert* (Makó, József A. Gimn., IV. o. t.)

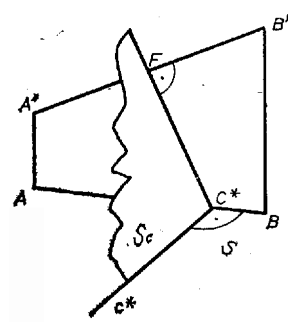
**II. megoldás.** Térbeli meggondolással a feladat állításánál többet bizonyítunk be.

Szerkesszük a három trapézt az $ABC$ háromszög oldalai fölé kifelé, ekkor az előírásokból adódó $AA' = AA''$, $BB' = BB''$, $CC' = CC''$ egyenlőségre tekintettel a trapézok és a háromszög együttes alakzata felfogható, mint egy (ferdén) elmetszett (egyenes) hasáb egyik része papírmodelljének kiterített hálózata, a metszetidom nélkül. Ugyanis az $ABB'A''$ trapézt $AB$ mint tengely körül és az $ACC''A'$ trapézt $AC$ körül forgatva az $AA''$ egyenes abban a síkban mozog, amely merőleges $AB$-re és átmegy $A$-n, az $AA'$ pedig abban, amely merőleges $AC$-re és átmegy $A$-n. E két sík egyetlen közös egyenese az $A$-ban a háromszög $S$ síkjára állított merőleges (mert $A$-n át ez az egyetlen olyan egyenes, amely $AB$-re is, $AC$-re is merőleges), és ha $AA'$-t is, $AA''$-t is ebben az egyenesben megállítjuk, az $AA' = AA''$ egyenlőség alapján $A'$ és $A''$ egy $A_1$ pontban találkozik, tehát $AA_1 \perp S$. Ugyanígy $B'$ és $B''$ egy $B_1$ pontban, $C'$ és $C''$ egy $C_1$ pontban találkozik, és $AA_1 \| BB_1 \| CC_1$, ezek a mondott hasáb oldalélegyenesei és a mondott metsző sík az $A_1B_1C_1$ sík.




*1. ábra*

Azt állítjuk, hogy az $S$ síkban, a $C^*$ pontban az $AB$ egyenesre állított $c^*$ merőleges egyenes azonos az $A_1B_1$ szakasz $S_c$ felező merőleges síkjának $S$-sel való metszésvonalával. Ehhez belátjuk, hogy $c^*$ merőleges $A_1B_1$-re.




*2. ábra*

$S_c$ merőlegesen áll minden olyan síkra, amely tartalmazza az $A_1B_1$ egyenest, köztük az $A_1AB$ síkra. Az utóbbira merőleges maga $S$ is, tehát $S_c$-nek és $S$-nek $c^{**}$ metszésvonala is. Így $c^{**}$ merőleges $AB$-re, benne van $S$-ben és nyilvánvalóan átmegy $C^*$-on, tehát azonos $c^*$-gal, amint állítottuk.

Ugyanígy az ($S$ síkban) $A^*$-ban $BC$-re merőlegesen állított $a^*$ egyenes a $B_1C_1$ szakasz felező merőleges síkjának, a $B^*$-ban $CA$-ra merőlegesen állított $b^*$ egyenes a $C_1A_1$ szakasz felező merőleges síkjának $S$-sel való metszésvonala.

Megmutatjuk, hogy a három felező merőleges sík egy egyenesben metszi egymást. Ugyanis $A_1B_1$ és $B_1C_1$ felező merőleges síkjának minden pontja egyenlő távolságra van $A_1$-től és $B_1$-től, ill. $B_1$-től és $C_1$-től, ezért e két sík $t$ metszésvonalának minden pontja egyenlő távolságra van $A_1$-től, $B_1$-től és $C_1$-től, tehát $t$ benne fekszik az $A_1C_1$ szakasz felező merőleges síkjában is.

Így pedig $t$ és $S$ közös $L$ pontja rajta van $c^*$, $a^*$ és $b^*$ mindegyikén; ezzel az állítást bebizonyítottuk. Nem használtuk fel az $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ oldalélszakaszok hosszát, ezért az $AA' = AA'' = AA_1$ stb. egyenlőségi föltételek teljesülése esetén a kérdéses három merőleges egyenes mindig egy pontban metszi egymást, és ez az a pont, amely egyenlő távolságra van $A_1$, $B_1$, $C_1$ mindegyikétől.

*Katona Endre* (Szeged, Radnóti M. Gimn., III. o. t.)