

1. Összefüggésen leggyakrabban egyenlőségi kapcsolatot értünk, először ilyen frunk fel az (1)-ből kivehető két független egyenlet alapján, t kiküszöbölésével. Természetesen feltesszük, hogy a nevezők egyike sem 0, azaz t sem $\pi/2$ -nek, sem $\pi/3$ -nak nem egész számú többszöröse. Látjuk másrészt, hogy $x = y = z = 0$ bármely (megengedett) t mellett kielégíti (1)-et, nem lehet azonban x , y és z között vegyesen 0 is és tőle különböző érték is. Tovább ezt is kizárjuk.

(1) első két hányadosának egyenlőségéből

$$(2) \quad \frac{y}{x} = \frac{\sin 2t}{\sin t} = 2 \cos t,$$

az első és utolsóból pedig

$$(3) \quad \frac{z}{x} = \frac{\sin 3t}{\sin t} = \frac{3 \sin t - 4 \sin^3 t}{\sin t} = 3 - 4 \sin^2 t = -1 + 4 \cos^2 t.$$

Ide (2)-t behelyettesítve, majd rendezéssel:

$$(4) \quad \frac{z}{x} = -1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2, \quad x^2 - y^2 + xz = 0$$

a kívánt jellegű, mindhárom változót tartalmazó összefüggés.

2. Kaphatunk egyenlőtlenséget is x és y , valamint x és z között (2), ill. (3) alapján:

$$(5) \quad |\cos t| < 1 \quad \text{miatt} \quad \left|\frac{y}{x}\right| < 2, \quad |y| < 2 \cdot |x|,$$

egyenlőség nem állhat fenn $\sin t \neq 0$ miatt. Továbbá

$$(6) \quad -1 \leq \frac{z}{x} < 3,$$

amit így is mondhatunk: ha z és x egyenlő előjelűek, akkor $|z| < 3 \cdot |x|$ ha pedig ellentett előjelűek, akkor $|z| \leq |x|$.

3. Megjegyezzük még, hogy megfordítva, (4) teljesüléséből nem következik (1), de már minden a (4)-et, (5)-öt, (6)-ot és az $xyz \neq 0$ feltételt is teljesítő x , y , z számhármashoz van egy és csak egy olyan t a nyitott $(0, \pi/3)$, $(\pi/3, \pi/2)$, $(\pi/2, 2\pi/3)$ és $(2\pi/3, \pi)$ intervallumok valamelyikében, amellyel teljesül (1)

Füredi Zoltán (Budapest, Móricz Zs. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. Érdekes megnézni, mi van a kérdés mögött. Ha egy x , y , z számhármashoz van olyan t , hogy teljesül (1) és $xyz \neq 0$, akkor kx , ky , kz -hez ugyanaz a t tartozik hozzá. Ha tehát az x , y , z számhármast egy P pont térbeli derékszögű koordinátáinak tekintjük, akkor a P -t az O origóval összekötő egyenes minden pontja megfelelő (természetesen $k < 0$ is lehet).

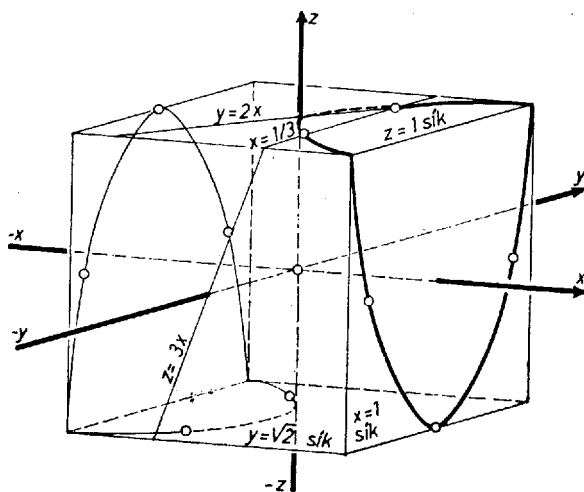
Jelöljük az (1) hányadosok közös értékét d -vel, tekintsük az

$$x = d \sin t, \quad y = d \sin 2t, \quad z = d \sin 3t$$

számokat egy téglatest éleinek és helyezzük el ezt úgy, hogy egy-egy x , y , z hosszúságú éle rendre az x , y , ill. z -tengelyre essék. Ekkor a test O -ból induló testátlója éppen az előbb mondott egyenesen van rajta. $t > 60^\circ$ esetén a negatívnak adódó él (vagy élek) abszolút értékét vesszük és a téglatestet úgy illesztjük be, hogy ez az él az illető tengely negatív felére essék.

t változásával a testátló egyenese várhatóan egy kúpszerű felületet ír le, melynek csúcsa az origó. Ezt a sejtést vázoljuk.

Az origót körül vesszük az $x = \pm 1$, $y = \pm \sqrt{2}$, $z = \pm 1$ síkokkal körülzárt négyzetes hasábbal, és megkeressük a (4) egyenletű felület közös pontjait a határoló 4 téglalappal és 2 négyzettel (1. ábra, az elülső sík: $y = -\sqrt{2}$).



1. ábra

Az $x = 1$ síkon az adódó $z = y^2 - 1$ parabola $|y| \leq \sqrt{2}$ ívének pontjait kapjuk az $(y = 0, z = -1)$ és az $(y = \pm 1, z = 0)$ pontok nélkül, ezek ugyanis $t = 90^\circ$ -nak, 60° -nak, 120° -nak felelnének meg. (Az $x = -1$ síkon az előbbi ív tükörképét kapjuk az origóra, hasonlóan $y = -\sqrt{2}$, $z = -1$ esetét sem kell külön vizsgálni.)

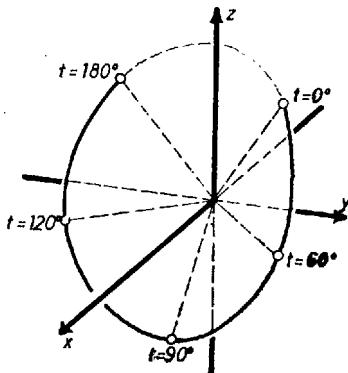
$y = \sqrt{2}$ esetén csak az $(x = 1, z = 1)$ és a $(-1, -1)$ pont teljesíti az adódó $x^2 + xz = x(x + z) = 2$ egyenletet (hiszen $|x| \leq 1$, $|z| \leq 1$, és így $|x + z| \leq 2$).

$z = 1$ esetén pedig az $x = y^2 - x^2$, másképpen

$$\frac{(x + 0,5)^2}{0,25} - \frac{y^2}{0,25} = 1$$

hiperbola két íve, az $y = 2x$ egyenessel – lásd (5) – való $(x = 1/3, y = 2/3)$ metszésponttól $(1, \sqrt{2})$ -ig terjedő ív a kezdőpontja nélkül, és ennek tükörképe az $y = 0$ síkra. (Megadja a kizárást (6) is.)

Más nézetben ábrázolja a kúp egy részét a 2. ábra.



2. ábra

Mindezek szerint a kúp egyenletének a (4) alakról a paraméteres (1) alakra való átírása kizárt három elszigetelt alkotót, továbbá más két alkotó közti részét a felületnek.