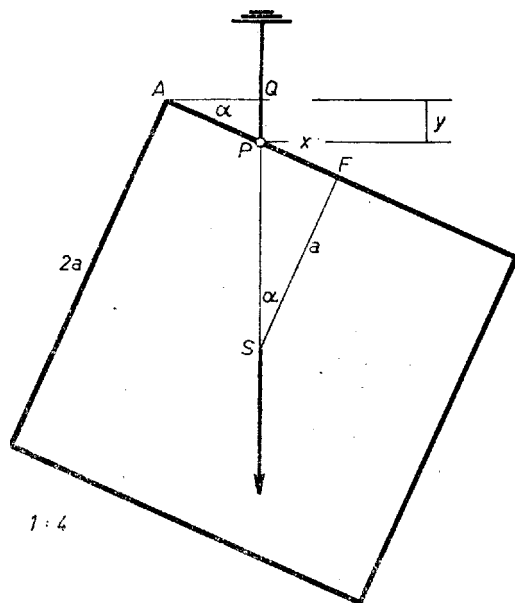


Legyen a lemez éle röviden $2a$, a kérdéses P felfüggesztési pontnak a vele egy élen levő F oldalfelező ponttól való távolsága x , így az A legközelebbi csúctól mért távolsága $a - x$.



Homogén lemez S súlypontja a négyzet középpontjában van, így PS függőleges helyzetű lesz, és A -nak ezen levő vetületét Q -val jelölve az $FP = x$ -től függő $PQ = y$ magasságkülönbség maximumát keressük.

A PAQ és PSF derékszögű háromszögek hasonlóak, mert P -beli szögeik egymásnak csúcsszögei, így $PSF \sphericalangle = PAQ \sphericalangle$. Jelöljük ezt a szöget α -val, ekkor a PSF háromszögben $x = a \operatorname{tg} \alpha$ és a PAQ háromszögben

$$y = PQ = AP \sin \alpha = (a - x) \sin \alpha = a (1 - \operatorname{tg} \alpha) \sin \alpha.$$

Mivel $0 \leq x \leq a$ azért $0 \leq \alpha \leq 45^\circ$. Az y értéke a végpontokban 0 és az értelmezési tartomány belsejében y pozitív, így y az értelmezési tartomány belsejében veheti fel a maximumát. Ha van olyan α érték, melyre y maximális, akkor emellett y -nak α szerinti deriváltja 0-val egyenlő:

$$(1) \quad \frac{dy}{d\alpha} = -\frac{a}{\cos^2 \alpha} \sin \alpha + a (1 - \operatorname{tg} \alpha) \cos \alpha = 0.$$

Mivel $a > 0$, $\cos \alpha > 0$, oszthatunk velük, továbbá (-1) -gyel is osztva:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha - 1 = 0.$$

Itt $\sin \alpha$ helyére $\sin \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$ -t írva az $x/a = \operatorname{tg} \alpha$ ismeretlenre harmadfokú egyenletet kapunk:

$$(2) \quad \operatorname{tg}^3 \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha - 1 = 0.$$

Ennek egy gyöke a Cardano-féle képlet szerinti¹

$$\frac{x}{a} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{177}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{177}}{18}}.$$

Az előírt 0,1 mm-es hibakorlát az $a = 1$ dm-es adatnak $1/10^3$ része, ezen belül maradunk, ha egyik köbgyökben sem haladjuk meg az $5/10^4$ hibát.

Táblázatunk szerint $\sqrt{177}$ értéke 13,30 és 13,31 között van, 18-adrésze 0,7390 és 0,7395 között, így a két köbgyök alatt 1,2390 és 1,2395 közötti, ill. $-0,2395$ és $-0,2390$ közötti szám áll.

A köbgyökvonásokat logaritmussal végezve az első köbgyök értéke 1,0740 és 1,0742 között van, a másodiké $-0,6207$ és $-0,6206$ között, így x/a értéke 0,4533 és 0,4536 között, ezért akár 0,453-et, akár 0,454-et veszünk, az elkövetett hiba kisebb, mint 10^{-3} .

Több valós gyöke nincs (2)-nek, mert bal oldalának deriváltja,

$$3\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 2$$

¹Lásd pl. *Hack Frigyes–Kugler Sándorné*: Függvénytáblázatok, matematikai és fizikai összefüggések, Tankönyvkiadó, Budapest, 1968, 65–66. o.

mindenütt pozitív, a bal oldal szigorúan monoton nő. Így a keresett szélső érték csak $x/a = 0,453$ -nél lehet. Itt valóban maximum van, hiszen $\frac{dy}{d\alpha}$ előjele a (2) bal oldalán álló kifejezés előjelének (-1) -szerese, és mivel (2) bal oldalának a deriváltja pozitív, (2) bal oldala monoton nő α -ban, tehát a kapott gyökhely előtt negatív és utána pozitív. Ennek megfelelően y mint az α függvénye a kapott gyökhely előtt monoton nő, utána pedig monoton fogy.

$a = 10$ cm figyelembevételével a keresett távolság $PA = 10 - 4,53 = 5,47$ cm. (A magasságkülönbség maximuma ekkor 22,6 mm.)

Simon Júlia (Győr, Kazinczy F. Gimn.)