

A P. 26. problémában¹ bizonyítva láttuk, hogy a $4 \times k$ méretű sakktábla ($k = 3$ és $k \geq 5$) egymás utáni lóugrásokkal, minden mezőre egyszer lépve csak úgy járható be, ha először az egyik olyan résztartományát járjuk be, amely a szélső sorok ($1 \times k$ méretű téglalapok) valamelyik színű mezőiből és a középső sorok ellentétes színű mezőiből áll. A bizonyítás felhasználta, hogy az összes mezőket egyszer bejárva lóugrással, csak egy olyan lépés van, amelyik belső sorból belső sorba vezet, ezzel lép át a ló az egyik résztartományból a másikba.

Ezekre támaszkodva a bejárásokat csoportosítjuk résztartományváltó lépésük szerint, külön-külön megállapítjuk az egyes csoportokba tartozó bejárások számát, végül e számokat összegezzük. Ehhez

1. megállapítjuk a résztartományváltó EM lépéseket, ahol E az első résztartomány utoljára bejárt mezejét, M pedig a második résztartomány elsőnek bejárt mezejét jelöli.

2. minden egyes E -hez és M -hez mint kiindulópont-hoz megállapítjuk saját résztartománya bejárási lehetőségeinek számát (vagyis most az első résztartományt visszafelé járjuk be), legyen ez egy bizonyos EM pár esetében e , ill. m .

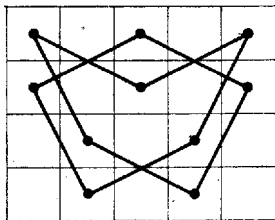
3. minden egyes, az E -hez vezető mondott bejárást visszafordítva összekapcsolunk minden egyes, az M -ből induló, mondott bejárással egy-egy teljes bejárásává a táblának, eszerint a mondott EM -hez em számú teljes bejárás tartozik.

1		2		3
4	17	5	18	6
14	7	15	8	16
	9		10	

1. ábra

A	B	C		
A_1	B_2	C_1	B_2	A_1
A_2	B_1	C_2	B_1	A_2
A	B	C		

2. ábra



3. ábra

Eljárásunkat megkönnyítik a tábla szimmetriái, valamint az, hogy a két résztartomány egymás tükörképe a tábla középső sorait elválasztó egyenesre. A szükséges mezőket az 1. ábra szerint számokkal jelöljük, 1–10 az elsőnek bejárható résztartomány mezői, közülük 4–8 az E mezők, 14–18 pedig a második tartomány M mezői. Az így megállapítandó em összegnek a kétszerese lesz a keresett szám, hiszen nyilvánvalóan minden útvonal oda-vissza bejárható.

A 2. ábrán a középső sorok mezőit oszlopuk helyzete és a tábla függőleges szimmetriatengelyére tükrös voltak alapján A, B, C betűkkel és a tartományt jelző indexszel is megjelöltük; nyilvánvalóan mindegyik A_i ($i = 1, 2$) típusú mezőből indulva a maga résztartománya ugyanannyiféleképpen járható be, és ugyanez áll a B_i , valamint a C_i mezőkre; legyenek e számok (a fönti e és m konkrét értékei) a, b és c .

A tartományváltó lapos ugrások száma 6, közülük 2–2 A_1C_2, C_1A_2 , ill. B_1B_2 típusú (pl. 4–15 és 6–15 az első típusúak), eszerint a tábla összes bejárásainak száma $N = 2(2ac + 2ca + 2b^2) = 8ac + 4b^2$.

Megjegyezzük még, hogy a szélső (A -) oszlopok; mezőiről 2–2 mezejére léphet a ló az illető tartománynak, a B mezőkről 3-ra, a C mezőkről pedig 4-re. Ez a szélső oszlopok mezőin való áthaladás 2–2 lépését egyértelműen összekapcsolja:

$$-5 - 1 - 7-, \quad -2 - 4 - 9-, \quad -5 - 3 - 8-, \quad -2 - 6 - 10-,$$

kivéve ha az illető mező kezdő- vagy végpontja a tartomány bejárásának (tehát a négy egymás utáni hármashból legalább kettő minden bejárásban megtalálható valamelyik irányban). Ilyen blokká kapcsolódhat négy egymás utáni lépés is:

$$-7 - 1 - 5 - 3 - 8-, \quad \text{ill.} \quad -9 - 4 - 2 - 6 - 10-,$$

ti. ha 1 és 3, ill. ha 4 és 6 egyike sem végpont.

Mármint az A, B, C típusú E - (ill. M -) mezők konkrét mintapéldájának rendre a 4-es, 7-es, 5-ös mezőt véve, az első tartomány bejárásai – rendszeres próbálgatás eredményeként – az alábbiak; 2–2 szomszédos, közös kezdőszakasszal bíró bejárás zárójelbe foglalt részei egymásnak megfordításai.

¹Lásd K. M. L. 39 (1969) 151. o.

$$\begin{array}{lcl}
\text{(I)} & 4-9-5-(1-7-10-6-2-8-3) & \\
\text{(II)} & -(3-8-2-6-10-7-1) & \\
\text{(III)} & 4-9-8-(2-6-10-7-1-5-3) & \\
\text{(IV)} & -(3-5-1-7-10-6-2) & \\
\text{(V)} & 4-9-8-3-5-(1-7-2-6-10) & \\
\text{(VI)} & -(10-6-2-7-1) & \\
\text{(VII)} & 4-2-6-10-7-1-5-(3-8-9) & \\
\text{(VIII)} & -(9-8-3) & \\
\text{(IX)} & 7-1-5-(3-8-9-4-2-6-10) & \\
\text{(X)} & -(10-6-2-4-9-8-3) & \\
\text{(XI)} & 7-10-6-2-4-9-8-3-5-1 & \\
\text{(XII)} & 5-(1-7-10-6-2-4-9-8-3) & \\
\text{(XIII)} & -(3-8-9-4-2-6-10-7-1) &
\end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \\ \text{(IV)} \\ \text{(V)} \\ \text{(VI)} \\ \text{(VII)} \\ \text{(VIII)} \\ \text{(IX)} \\ \text{(X)} \\ \text{(XI)} \\ \text{(XII)} \\ \text{(XIII)} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} a=8 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ b=3 \\ \\ c=2 \end{array}$$

Ezek szerint $a = 8$, $b = 3$ és $c = 2$, tehát a táblának $N = 164$ bejárása van.

Katona Endre (Szeged, Radnóti M. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az (I)–(XIII) bejárásokat a következő észrevétel páronként egymásra, ill. önmagukra képezi le (és így bizonyos szempontból a teljesség ellenőrzésének is tekinthető). *Bármely bejárás alapján felírható egy újabb, az első tartomány minden mezeje helyére a vele egy oszlopban állót írva, azaz a bejárásban az 1–4, 7–9, 2–5, 8–10, 3–6 mezőpárokat fölcserélve (igazolását az olvasóra hagyjuk). Pl. (III)-ból:*

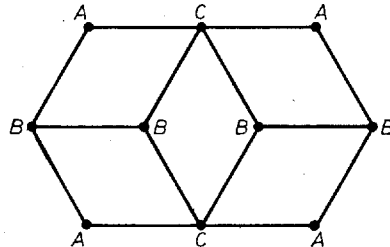
$$\text{(III')} \quad 1-7-10-5-3-8-9-4-2-6,$$

ennek a függőleges tengelyekre való tükörképe (vagyis 1–3, 4–6, ... fölcserélése, 2 és 5 helyükön hagyása):

$$\text{(III'')} \quad 3-8-9-5-1-7-10-6-2-4,$$

fordított sorrendben a (VIII)-at adja. – (XII) és (XIII) egymás tükörképei, mindkettőhöz a (IV) tartozik így hozzá.

2. A (IV), (IX), (XI)–(XIII) bejárások kezdő- és végpontja lóugrásnyira van egymástól, vagyis a féltábla bejárása záródik; mind az ötöt a 3. ábra szemlélteti, más-más lépés kiiktatásával.²



4. ábra

3. Feladatunk ekvivalens a 4. ábra gráfja szögpontjainak nyílt bejárásával, valamelyik szögpontból indulva és a gráf élei mentén haladva minden csúcsain át kell haladni egyszer.

Katona Endre

²Lásd: Tusnády Gábor – Surányi János – Bakos Tibor: A $4 \times k$ méretű sakktábla bejárása, K. M. L. 40 (1970) 2–4. o.