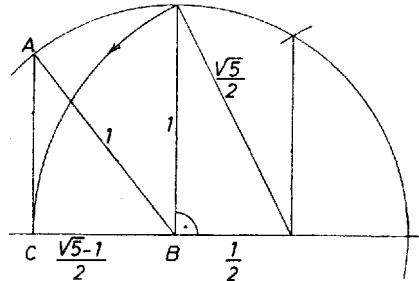


I. Legyen a kérdéses ABC háromszög AB átfogója egységnyi, kisebbik hegyesszöge $BAC = \alpha$, így befogói $AC = \cos \alpha$ és $BC = \sin \alpha$, rövidítsük ezeket rendre c , s betűvel. A követelmény szerint $c^2 = 1 \cdot s$, így Pitagorasz tétele alapján

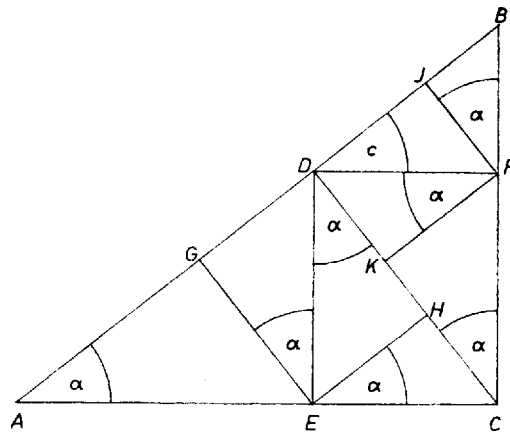
$$s^2 + s - 1 = 0, \quad s = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad (\approx 0,6180).$$

Eszerint a háromszög megkapható az egységnyi sugarú körbe írt szabályos tíz- (és öt-)szög oldala ismert (ún. Ptolemaiosz – Dürer-féle) szerkesztésének egy lépéssel való kiegészítése útján, a k kör középpontja B , a tízszögoldal BC és a C -ben emelt merőlegesnek k -n levő pontja A (1. ábra).



1. ábra

II. Jelöljük a derékszög csúcsából húzott magasság talppontját az egymás utáni háromszögekben az alábbiak szerint (2. ábra):



2. ábra

háromszög: ABC , ACD , BCD , ADE , CDE , BDF , CDF ,

talppont: D , E , F , G , H , J , K .

A keletkezett háromszögek hasonlóak, mindegyik befogó egy továbbosztással keletkezett háromszögben átfogó lesz, így a szakaszok legtöbbje mint vetület fejezhető ki s -sel és c -vel, ill. a követelmény szerint egyedül c -vel:

$$\begin{aligned} DC &= AC \sin \alpha = BC \cos \alpha = cs = c^3, \\ DA &= AC \cos \alpha = c^2; & DB &= BC \sin \alpha = s^2 = c^4; \\ ED &= CF = CD \cos \alpha = c^4, & FD &= CE = CD \sin \alpha = c^3 s = c^5, \\ EA &= c^3, & FB &= c^6; \\ GE &= DH = c^5, & GD &= EH = c^6, & GA &= c^4, & HC &= c^7, \\ JF &= DK = c^7, & JD &= FK = c^6, & JB &= c^8, & KC &= c^5; \end{aligned}$$

végül azok a megrajzolt szakaszok, amelyek nem oldalai a fenti háromszögek valamelyikének:

$$\begin{aligned} AJ &= AB - JB = 1 - c^8 = 1 - s^4 = (1 - s^2)(1 + s^2) = c^2 \cdot \sqrt{5}s = \sqrt{5}c^4, \\ BG &= AB - AG = 1 - c^4 = 1 - s^2 = c^2, \\ GJ &= GD + DJ = 2c^6, \\ HK &= CK - CH = c^5(1 - c^2) = c^5 s^2 = c^9. \end{aligned}$$

Ezek szerint a 10 pont közti megrajzolt 28 szakasz közül 26-nak a mértékszámát c -nek valamely nem negatív egész kitevős hatványával egyenlő. Mondjuk így: e szakaszok mindegyikéhez tartozik c -nek egy kitevője, és fordítva: a 0, 1, ..., 9 kitevők mindegyikéhez hozzátartozik az ábrának legalább egy szakasza. A kitevők szerint csoportosítva:

$$\begin{array}{ll} c^0 = AB & c^5 = FD, CE, EG, DH, KC \\ c = AC & c^6 = BF, DG, EH, JD, FK \\ c^2 = BC, AD, BG & c^7 = CH, JF, DK \\ c^3 = CD, AE & c^8 = JB \\ c^4 = BD, ED, CF, AG & c^9 = HK \end{array}$$

a hátra levő 2 szakasz pedig egy c -hatvány állandósorozosa:

$$(1) \quad AJ = \sqrt{5}c^4, \quad GJ = 2c^6.$$

Így minden olyan szakaszpárnak megtalálható a mértani középarányosa, amelynek a kitevői egyenlő párosságúak (és természetesen különbözők), pl. AB és BF mértani középarányosát adja CD is, AE is. És fordítva: a talált mértani sorozat első és utolsó tagját (AB -t és HK -t) kivéve minden szakaszhoz található olyan két (tőle különböző) szakasza az ábrának, melyeknek $\frac{1}{2}$ mértani középarányosa, pl. JB -hez egyrészt HK , másrészt CH , JF és DK bármelyike.

Az (1) szakaszok viszont ilyen szakaszhármasban nem szerepelhetnek, mert $\sqrt{5}$, ill. 2 állandó tényezőjük c -nek nem egész kitevős hatványa, a szorzatuk sem, és e kitevők nem is $n + 1/2$ alakúak, ahol n egész szám: $\sqrt{5} = c^{-3,345}$, $2 = c^{-2,881}$, $2\sqrt{5} = c^{-6,225}$.

Meghatározzuk végül a kérdéses szakaszpárok számát. Egy c^5 hosszúságú szakasz mértani középarányos minden lehetséges (c^4, c^6) , (c^3, c^7) , (c^2, c^8) és (c, c^9) pár között, ezek megválasztására $4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 30$ lehetőség van. (Ha még azt is nézzük, hogy a c^5 hosszú mértani közép szerepére az 5 ilyen szakasz melyikét választjuk, akkor az ilyen szakaszhármasok száma $5 \cdot 30 = 150$.) Hasonlóan

$$c, \quad c^2, \quad c^3, \quad c^4, \quad c^6, \quad c^7, \quad c^8$$

hosszúságú mértani közepet ad rendre

$$3, \quad 6, \quad 22, \quad 29, \quad 21, \quad 10, \quad 3$$

(különböző hosszúságú) szakaszpár, tehát a párok összes száma 124. (Az egyenlő hosszú szakaszok közti ilyen kapcsolatokat figyelmen kívül hagytuk.)

Szendrei Ágnes (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o. t.)