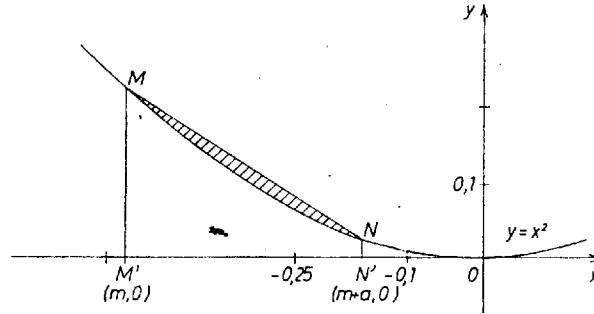


Minden parabola hasonló (egyetlen lineáris adat határozza meg, a fókuszának a vezéregyenestől való távolsága), ezért elég az állítást az $y = x^2$ egyenletű parabolára igazolni. Ennek vezéregyenese párhuzamos az x tengellyel, azt kell tehát belátnunk, hogy ha egy változó helyzetű húr M, N végpontjainak abszcisszái m és $m + a$, vagyis a kérdéses vetület hossza a , ahol a pozitív állandó, m pedig tetszés szerinti érték, akkor a húr által lemetezett parabolaszeglet területe nem függ m -től.

Legyen M, N vetülete az x tengelyen M', N' , akkor a szelet területe egyenlő a húr alatti $MNN'M'$ trapéz és az MN parabolaív alatti, ugyanezen csúcsokkal bíró görbe vonalú trapéz területének különbségével. (Amennyiben M vagy N a parabola csúcsában van, akkor trapézok helyett háromszögekről van szó, de ez a további számítást nem módosítja.)



A trapéz területe, mivel párhuzamos oldalai az $M'M = m^2$ és $N'N = (m+a)^2$ ordináták, magassága (szélessége) a ,

$$MNN'M' = \frac{a}{2}(2m^2 + 2am + a^2) = am^2 + a^2m + \frac{a^3}{2},$$

a görbe vonalú trapéz területe pedig

$$\int_m^{m+a} x^2 dx = \frac{1}{3}[(m+a)^3 - m^3] = am^2 + a^2m + \frac{a^3}{3},$$

tehát a szelet területe $\frac{a^3}{6}$, valóban nem függ m -től. Az állítást bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Természetesen a húr alatti trapéz területét is számíthattuk volna integrállal. A húr a

$$h(x) = m^2 + \frac{(m+a)^2 - m^2}{a}(x-m)$$

függvény képe, így

$$t = \int_m^{m+a} (h(x) - x^2) dx.$$