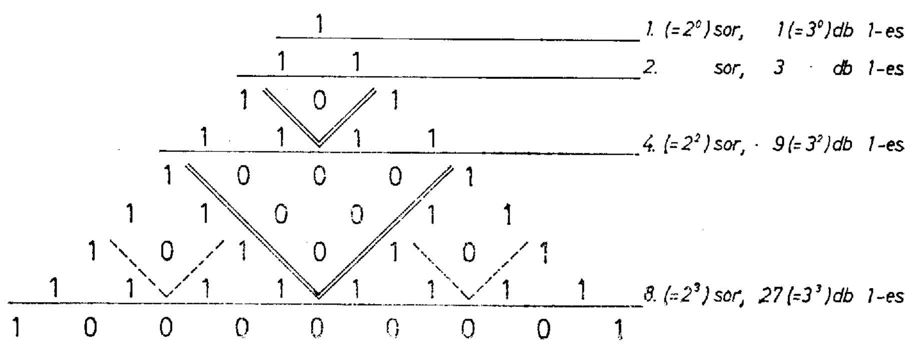
Feladatunkban a binomiális együtthatóknak csupán a páros vagy páratlan voltát kell tekintenünk, ezért megtehetjük, hogy a párosokat 0-sal, a páratlanokat 1-essel helyettesítjük. Az így módosított számelrendezésre is nyilvánvalóan érvényes a Pascal-háromszög elemeinek képezési eljárása: minden belső elem a fölötte álló két elem összege – de két szomszédos 1-es alatt középen 2 helyett 0 áll –, továbbá minden sor két szélső eleme 1-es. Az új séma 1-eseinek számát kell megállapítanunk azokig az egyenesekig, amelyek a sémából $2^n$ számú sort vágnak le a csúcsától számítva, $n = 0,\ 1,\ 2.$

…. Megjegyezzük, hogy az $\binom{u}{v}$, $0 \le v \le u$ együtthatók az $(u+1)$-edik sorát alkotják a sémának.

Felírva a módosított séma első 9 sorát, azt látjuk, hogy $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ esetén a $2^n$ sorszámú sorig bezárólag az 1-esek száma valóban $3^n$. A leszámlálás helyett $n = 3$ esetén elég azt észrevenni, hogy a $2^2$ és $2^3$ számú sort levágó vízszintes vonalak közti trapézt a berajzolt ferde vonalakkal 3 háromszögre vágva a két szélső háromszög „egybevágó” a sémának a trapéz fölötti háromszögével (azaz helyről helyre ugyanazt a számot tartalmazza), a közbülső háromszög pedig egyetlen 1-est sem tartalmaz. Így a trapézban 2-szer annyi 1-es áll, mint fölötte, tehát azokat is véve, együttes számuk 3-szor annyi, mint a felső háromszögben.




Megmutatjuk, hogy a figyelembe vett sorok számát $2^n$-ről $2^{n+1}$-re emelve – azaz megkétszerezve – ez a tulajdonság megismétlődik. Így – ha az első $2^n$ sorban levő 1-esek száma $N$, akkor az első $2^{n+1}$ sorban levők száma $(1+2)N = 3N$. Ehhez csupán azt tesszük föl, hogy a $2^n$ sorszámú sor minden eleme 1-es (ahogyan $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$-ra látjuk), szám szerint $2^n$ db 1-esből áll (hiszen a séma minden sora annyi elemet tartalmaz, amennyi a sorszáma).

Feltevésünk folytán a $(2^n+1)$-edik sorba a $2^n$-edik sor $(2^n-1)$ szomszédos párja alá ugyanennyi 0 kerül belső elemként, mivel $1+1$ páros és csupán a külön szabály szerint képezett két szélső elem lesz 1-es. A mondott 0-ok szomszédos párjai alá ismét 0 kerül, számuk 1-gyel kevesebb, hiszen $e$ elemből $(e-1)$ szomszédos pár képezhető, vagyis itt $(2^n-2)$. Ez ismétlődik a $2^n + (2^n-1) = (2^{n+1}-1)$-edik sorig, amíg a 0-ok száma 1-re csökken, tehát kialakul a 0-ok háromszöge. Így pedig a $(2^n+1)$-edik sor első és utolsó 1-eséből a trapéz két szélső háromszöge valóban ugyanúgy alakul ki, mint a séma első $2^n$ sora (azzal valóban „egybevágók”) és a $2^{n+1} = 2\cdot 2^n$-edik sor $2\cdot 2^n$ számú 1-esből áll, a föltett tulajdonság a $2^n$-edik sorról öröklődik a $2^{n+1}$-edik sorra.

Ez pedig az előrebocsátottak szerint az 1-esek számának megháromszorozódását jelenti, az állítást bebizonyítottuk.

*Selényi Péter* (Budapest, Kvassay J. Híd-és Vízműépítési Techn., Ill. o. t.)

*Megjegyzés.* Meg lehet mutatni azt is, hogy a Pascal-háromszög minden egyes sorában a páratlan együtthatók száma $2^k$ alakú, ahol $k \ge 0$, egész.