

I. Megoldás. Két szám, u és v , harmonikus közepén, h -n reciprokok számtani közepének reciprokát értjük:

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} \right), \quad \text{ahonnan} \quad h = \frac{2uv}{u+v},$$

aminek csak akkor van értelme, ha u , v és $u+v$ egyike sem 0.

Legyenek (1) gyökei x_1 , x_2 , x_3 , és játssza a kiemelt szerepet x_2 , ekkor

$$(2) \quad x_2 = \frac{2x_1x_3}{x_1+x_3}.$$

Ismeretes¹, hogy a három gyök és (1) együtthatói között a következő összefüggések állnak fenn:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}, \quad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

Ide (2)-t beírva, az x_1 , x_3 ismeretlenekre három egyenletünk van, ami csak úgy teljesülhet, ha a jobb oldalak között bizonyos összefüggés áll fenn. Éppen ennek keresése a feladat, úgy kapjuk, hogy valamelyik két egyenlet alapján meghatározzuk x_1 -et és x_3 -at és ezt a hátra levőbe helyettesítjük.

$$(3) \quad x_1 + x_3 + \frac{2x_1x_3}{x_1+x_3} = -\frac{b}{a},$$

$$(4) \quad x_1x_3 + (x_1+x_3)x_2 = 3x_1x_3 = \frac{c}{a},$$

$$\frac{2x_1^2x_3^2}{x_1+x_3} = -\frac{d}{a},$$

és a másodikból azt látjuk, hogy $c \neq 0$ -nak is fenn kell állania, hiszen $d \neq 0$ miatt egyik gyök sem 0. (4) alapján az utolsóból

$$(5) \quad x_1 + x_3 = -\frac{2a}{d}(x_1x_3)^2 = -\frac{2a}{d} \cdot \left(\frac{c}{3a} \right)^2 = -\frac{2c^2}{9ad},$$

ami (4)-gyel együtt kétismeretlenes egyenletrendszert jelent az x_1 , x_3 párra.

Nincs azonban szükség x_1 és x_3 külön kifejezéseire, mert (3)-ban éppen x_1 és x_3 szimmetrikus függvényeire van szükség, így (3)-ból (5) és (4) alapján a keresett összefüggés:

$$-\frac{2c^2}{9ad} + \left(\frac{2c}{3a} \right) \cdot \left(-\frac{9ad}{2c^2} \right) = -\frac{2c^2}{9ad} - \frac{3d}{c} = -\frac{b}{a},$$

ill. a szokásos rendezéssel

$$(6) \quad 27ad^2 - 9bcd + 2c^3 = 0,$$

hacsak $ad \neq 0$. (A közben talált $c \neq 0$ feltételt nem kell ismételnünk, mert (6)-ból

$$c = \frac{27ad^2}{9bd - 2c^2} \neq 0.)$$

II. megoldás. Legyenek (1) gyökei x_1 , x_2 , x_3 . Mivel $a \neq 0$, azért az egyenlet valóban harmadfokú, és mivel $d \neq 0$, azért egyik gyök sem lehet 0-val egyenlő. Ha a gyökök közül az egyik harmonikus közepe a másik kettőnek, akkor e gyökök reciprokaik közül az egyik a másik kettő számtani közepe. E gyökök reciprokaik a

$$(7) \quad dx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

egyenlet gyökei, hiszen pl. az, hogy x_1 gyöke (1)-nek, azt jelenti, hogy

$$ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = 0,$$

ahonnan x_1^3 -nel osztva (ami $\neq 0$), kapjuk, hogy $\frac{1}{x_1}$ gyöke (7)-nek.

(7) gyökeit y_1 , y_2 , y_3 -mal jelölve, a gyökök és együtthatók összefüggése szerint

$$(8) \quad y_1 + y_2 + y_3 = -\frac{c}{d}, \quad y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = \frac{b}{d}, \quad y_1y_2y_3 = -\frac{a}{d}.$$

¹ Lásd pl. Hack F.: Függvénytáblázatok, matematikai összefüggések (Tankönyvkiadó, Budapest, 1967), 62. old., 251. 333-335. jelzőszám.

E gyökök közül akkor és csakis akkor lesz egyik a másik kettőnek számtani közepével egyenlő, ha az

$$S = (2y_1 - y_2 - y_3)(2y_2 - y_3 - y_1)(2y_3 - y_1 - y_2)$$

szorzat értéke 0. (8) alapján S kifejezhető az egyenlet együtthatóival:

$$\begin{aligned} S &= \left(3y_1 + \frac{c}{d}\right) \left(3y_2 + \frac{c}{d}\right) \left(3y_3 + \frac{c}{d}\right) = \\ &= 27y_1y_2y_3 + 9(y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1)\frac{c}{d} + 3(y_1 + y_2 + y_3)\frac{c^2}{d^2} + \frac{c^3}{d^3} = \\ &= -\frac{27a}{d} + \frac{9bc}{d^2} - \frac{3c^3}{d^3} + \frac{c^3}{d^3} = \frac{1}{d^3}(-27ad^2 + 9bcd - 2c^3). \end{aligned}$$

S tehát akkor és csakis akkor 0, ha (6) teljesül, vagyis (6) szükséges és elegendő feltétele annak, hogy (1) gyökei közül egyik a másik kettőnek harmonikus közepe legyen.