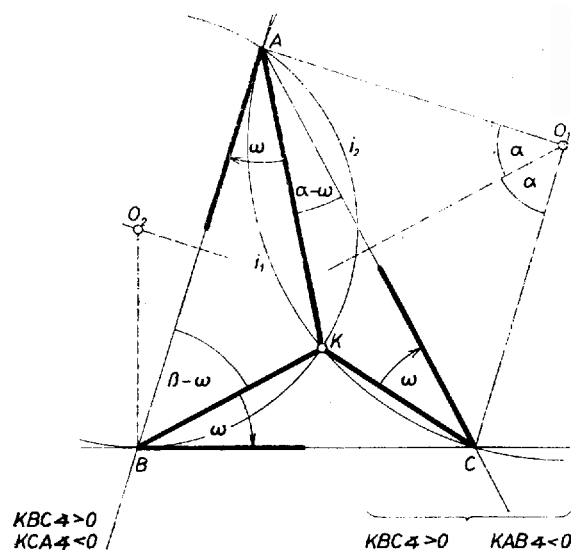
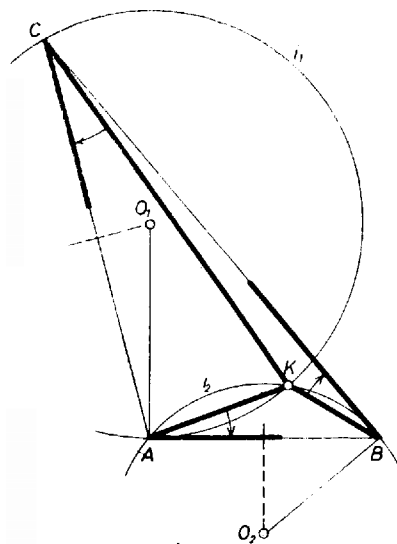


I. A K pont csak a háromszög belsejében lehet. Ha ugyanis K a síknak A -tól a BC egyenes által elválasztott pontja, és az ABC háromszög pozitív körüljárású, akkor $0 < KBC \angle < \pi$ (forgásszög főértékének a $-\pi$ és π közti értékét véve), viszont $KAB \angle$ és $KCA \angle$ közül legalább az egyik $-\pi$ és 0 közé esik (1a és 1b ábra).



1a. ábra



1b. ábra

Megállapításunkból élesebben az következik, hogy a három forgásszög iránya ellentétes a háromszög csúcsai A , B , C sorrendű körüljárásának irányával, és abszolút értéke kisebb, mint a háromszög legkisebb szöge.

Legyen egy, a háromszög belsejében levő K pontra a három forgásszög közös értéke ω , ekkor $KAC \angle = \alpha - \omega$, $KBA \angle = \beta - \omega$, és a CA , AB oldalnak K -ból vett látószöge rendre $CKA \angle = 180^\circ - \alpha$, $AKB \angle = 180^\circ - \beta$, tehát K megszerkeszthető a megfelelő i_1 , ill. i_2 látókörív közös pontjaként. Az i_1 -et tartalmazó kör O_1 középpontjánál levő szög $AO_1C \angle = 2\alpha$, így $CAO_1 \angle = 90^\circ - \alpha$ (előjellel együtt értve), tehát $BAO_1 \angle = BAC \angle + CAO_1 \angle = 90^\circ$, eszerint O_1 az A -ban AB -re állított merőlegesnek és AC felező merőlegesének közös pontja, más szóval: O_1 , a C -n átmenő és AB -t A -ban érintő kör középpontja. Eszerint i_1 e körnek az az AC íve, mely az AC egyenesnek B -t tartalmazó partján van. i_2 pedig hasonlóan az A -n átmenő és BC -t B -ben érintő körnek az az íve, amely az AB egyenesnek C -t tartalmazó partján van. Ezzel eljárást adtunk K megszerkesztésére.

i_1 és i_2 az A -n kívül egy további pontban metszik egymást – ez K –, mert A -beli érintőik szöget alkotnak, nagysága β . Az i_1 , i_2 ívek, és így K is a BAC szögtartományban vannak, és pedig a háromszög belsejében, mert az i_2 -t tartalmazó kör csupán érinti BC -t és áthalad A -n. Ezek alapján $ACK \angle = BAK \angle$, mert az i_1 -nek AK rész-ívén nyugvó kerületi szögek, és ugyanígy $BAK \angle = CBK \angle$, tehát a K pont megfelel a követelménynek.

A végzett szerkesztés bármely háromszögben végrehajtható, minden háromszögben egyértelműen létezik a K pont.

II. A KCA és KCB háromszögekből a sinustétel alapján, majd az addíciótételt alkalmazva

$$KC = \frac{AC \sin(\alpha - \omega)}{BC \sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{BC \sin \omega}{\sin(180^\circ - \gamma)},$$

$$b \sin \gamma \sin \alpha \cos \omega - b \sin \gamma \cos \alpha \sin \omega = a \sin \alpha \sin \omega,$$

amiből átrendezés után

$$\operatorname{ctg} \omega = \frac{a \sin \alpha + b \sin \gamma \cos \alpha}{b \sin \gamma \sin \alpha} = \frac{a}{b \sin \gamma} + \operatorname{ctg} \alpha.$$

Itt az első tag

$$\frac{b \cos \gamma + c \cos \beta}{b \sin \gamma} = \operatorname{ctg} \gamma + \left(\frac{c \sin \beta}{b \sin \gamma} \right) \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \beta},$$

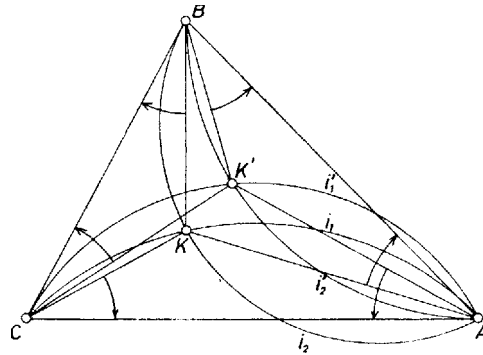
ennek második tagja $\operatorname{ctg} \beta$, hiszen a zárójelben 1 áll, ennél fogva

$$(1) \quad \operatorname{ctg} \omega = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma.$$

Skopál István (Budapest, Kölcsey F. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Akkor is egyértelműen létrejön a K pont, ha egy háromszögben B és C betűzését felcseréljük. Ezzel a körüljárás iránya ellentétesre fordul, úgyszintén ω iránya is megfordul, abszolút értéke azonban (1) szerint változatlan. Az új, K' pontra nézve az eredeti betűzés szerinti $K'AC$, $K'CB$, $K'BA$ forgásszögek egyenlők. K' csak akkor esik egybe K -val, ha $\alpha - \omega = \omega = \beta - \omega = \gamma - \omega$, azaz $\alpha = \beta = \gamma$ esetén, szabályos háromszögben.

K -t és K' -t a háromszög Brocard-féle pontjainak, ω -t pedig Brocard-féle szögének szokás nevezni. (2. ábra).¹



2. ábra

2. A P. 56. problémában² $\operatorname{ctg} \omega$ -nak a háromszög oldalaival és területével való kifejezését használjuk fel:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{2bc \cos \alpha}{2bc \sin \alpha} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4t}$$

és $\operatorname{ctg} \beta$, $\operatorname{ctg} \gamma$ analóg kifejezései alapján

$$\operatorname{ctg} \omega = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4t}$$

Egy másik szimmetrikus kifejezés (1)-ből $\sin \alpha = a/2r$ és az analóg kifejezések helyettesítésével, ahol r a háromszög köré írt kör sugara:

$$\operatorname{ctg} \omega = 2r \left(\frac{\cos \alpha}{a} + \frac{\cos \beta}{b} + \frac{\cos \gamma}{c} \right).$$

¹ Lásd Kürtschák József–Hajós György–Neukomm Gyula–Surányi János: Matematikai versenytételek, I. rész, 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1965, 28–29. o.

² Lásd ezen számban, 143. o.