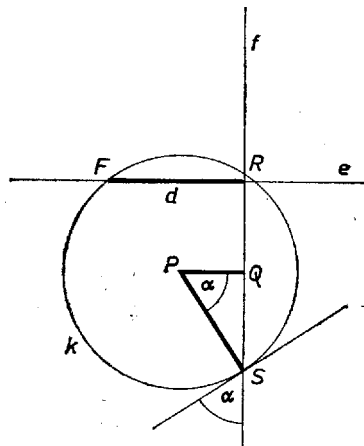


I. megoldás. Jelöljük az adott egyenest f -fel, az adott pontot F -fel, az adott hegyesszöget α -val, F és f távolságát d -vel. Legyen k a F -en átmenő tetszőleges kör, messe f -et az R, S pontokban, jelöljük k középpontját P -vel és P vetülete f -en legyen Q (1. ábra).



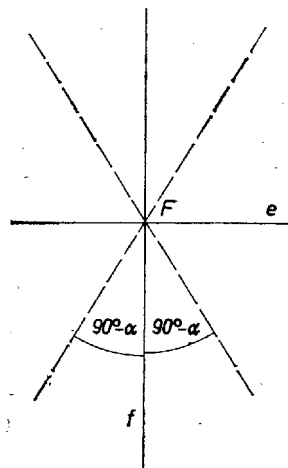
1. ábra

A PQS háromszög derékszögű, és P -nél levő szöge egyenlő k és f szögével, P tehát akkor és csakis akkor tartozik a vizsgált mértani helyhez, ha ez a szög egyenlő α -val. A PQS háromszögben

$$\frac{PQ}{PS} = \cos \alpha,$$

továbbá, $PS = PF$, így P akkor és csakis akkor tartozik a vizsgált mértani helyhez, ha az f -től mért távolsága a F -től mért távolságának $\lambda = \cos \alpha$ -szorosa. A továbbiakban az ilyen tulajdonságú pontok mértani helyét fogjuk meghatározni.

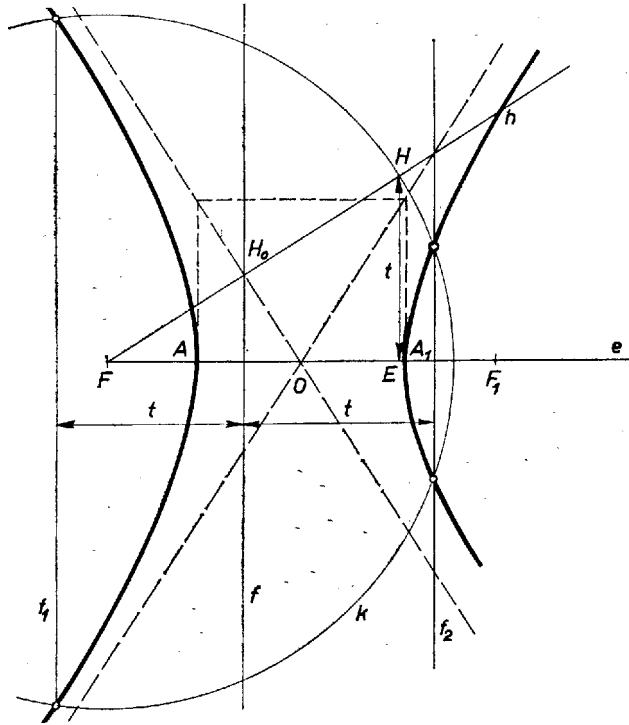
Ha F rajta van f -en, akkor azonos R és S egyikével, P tehát rajta van a F -en átmenő, f -fel $(90^\circ - \alpha)$ nagyságú szöget bezáró két egyenes egyikén (2. ábra).



2. ábra

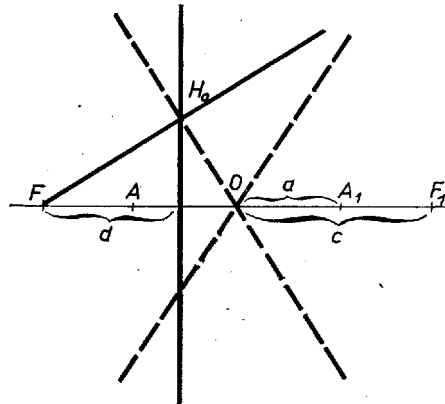
A fentiekből következik, hogy ezeknek az egyeneseknek minden, a F -től különböző pontja a mértani helyhez tartozik, és ebben az esetben ez a két egyenes adja a vizsgált mértani helyet (metszéspontjukat kivéve). A továbbiakban feltesszük, hogy F nincs rajta f -en, azaz $d > 0$.

Tájékozódásul megszerkesztjük a mértani helynek néhány pontját. F -en át f -re merőleges e félegyenest rajzolunk, majd ugyancsak F -en át e -vel $(90^\circ - \alpha)$ szöget bezáró h félegyenest. Egy, a F körül rajzolt tetszőleges k kör messe h -t H -ban, H vetülete e -n legyen E . Megrajzoljuk az f -től EH távolságra levő, f -fel párhuzamos f_1, f_2 egyeneseket: ezeknek k -val alkotott metszéspontjai a kívánt tulajdonságúak (3. ábra).



3. ábra

A kapott pontok alapján azt sejtjük, hogy a vizsgált mértani hely hiperbola, melynek F az egyik fókusza, és e a valós tengelye. Hogy ezt bizonyítani tudjuk, meghatározzuk először a sejtett hiperbolának a valós tengelyén levő pontjait és a másik fókuszát. Jelöljük ezeket A -val, A_1 -gyel, F_1 -gyel és a hiperbola centrumát O -val, legyen továbbá $OA = a$, $OF = c$ (4. ábra).



4. ábra

Ekkor $AF = c - a$; $A_1F = c + a$; A és f távolsága $d + a - c$; A_1 és f távolsága $a + c - d$. Mivel A és A_1 a mértani helyhez tartozik:

$$\begin{aligned}\lambda(c - a) &= d + a - c, \\ \lambda(c + a) &= -d + a + c.\end{aligned}$$

E kettő összegéből kapjuk, hogy $a = \lambda c$, ezt az elsőbe helyettesítve

$$c = \frac{d}{1 - \lambda^2} = \frac{d}{\sin^2 \alpha}, \quad a = \frac{d\lambda}{1 - \lambda^2} = \frac{d \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

adódik.

Sejtésünk igazolásához ezek szerint azt kell megmutatnunk, hogy ha egy tetszőleges P pont f -től mért távolsága a F -től mért távolságának a λ -szorosa, akkor $|PF - PF_1| = 2a$. Legyen $PF = r$; $PF_1 = R$; a PFF_1 háromszög F -nél levő szöge φ , ebben a háromszögben a cosinustétel alapján

$$(1) \quad R^2 = r^2 + 4c^2 - 4cr \cos \varphi.$$

Legyen P vetülete f -en Q , a FF_1 egyenesen T , akkor $FT = |r \cos \varphi|$. Ha $PQ = \lambda r$. Ha P és F az f ellentétes oldalán van, akkor φ hegyesszög és

$$\begin{aligned} FT &= d + PQ, \\ r \cos \varphi &= d + \lambda r, \end{aligned}$$

ha pedig P és F az f azonos oldalán van, akkor

$$r \cos \varphi = d - \lambda r,$$

hiszen $\varphi < 90^\circ$ mellett $FT = d - PQ$, $\varphi > 90^\circ$ mellett $FT = PQ - d$. Legyen ε értéke az első esetben (-1) , a másodikban $(+1)$, ekkor

$$(2) \quad r \cos \varphi = d - \varepsilon \lambda r.$$

Ennek alapján

$$\begin{aligned} c^2 - cr \cos \varphi &= c(c - d + \varepsilon \lambda r) = c \left(\frac{d}{1 - \lambda^2} - d - \varepsilon \lambda r \right) = \\ &= c \left(\frac{d\lambda^2}{1 - \lambda^2} + \varepsilon \lambda r \right) = c\lambda \left(\frac{d\lambda}{1 - \lambda^2} + \varepsilon r \right) = a(a + \varepsilon r), \end{aligned}$$

amit (1)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$R^2 = r^2 + 4\varepsilon ra + 4a^2 = (r + 2\varepsilon a)^2.$$

Ebből $\varepsilon = 1$ mellett $R = r + 2a$ következik, $\varepsilon = -1$ mellett közvetlenül csak annyit mondhatunk, hogy

$$R = |r - 2a|.$$

Azonban $R + r > 2c > 2a$, tehát $R > 2a - r$, így csak $R = r - 2a$ lehet.

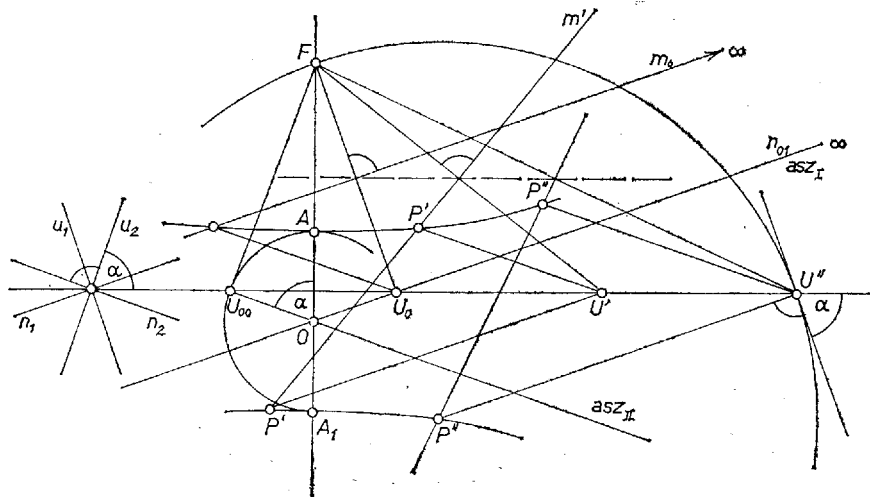
Ezzel beláttuk, hogy a vizsgált mértani hely pontjai rajta vannak a F , F_1 fókuszú, A , A_1 csúcsú hiperbolán. Fordítva, ennek a hiperbolának minden pontja a mértani helyhez tartozik, hiszen ha $R = r + 2\varepsilon a$, akkor a fenti átalakítással kapjuk, hogy (2) teljesül, amiből $PQ = \lambda r$ következik.

A kapott hiperbola képzetes tengelye

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{d}{\sqrt{1 - \lambda^2}} = \frac{d}{\sin \alpha} = a \operatorname{tg} \alpha,$$

az aszimptoták tehát α szöget zárnak be a valós tengellyel. Így az egyik aszimptotát megkapjuk, ha a tájékozódásban használt h egyenes f -fel való H_0 metszéspontjában merőlegest emelünk h -ra, a képzetes tengely pedig az FH_0 szakasz lesz.

Megjegyzés. A mértani hely egyes pontjait a következő eljárással is kaphatjuk. Válasszuk ki f -nek tetszés szerinti U pontját az előírt körrel való (egyik) metszéspont céljára, ekkor az U -n átmenő, f -fel α szöget bezáró két egyenes, u_1 , u_2 lesz egy-egy megfelelő kör U -beli érintője – amely az egyenes és kör metszésénél levő szög értelmezése szerint a kört a szög másik száráként képviseli. Továbbmenve a kör középpontja egyrészt az u_1 -re, ill. u_2 -re U -ban állított n_1 , n_2 merőlegesen lesz, másrészt az FU húr m felező merőlegesen (5. ábra).



5. ábra

Ebből az is adódik, hogy U minden helyzetében FU felező merőlegesén két pontja van a mértani helynek, kivéve ha az FU_0 , FU_{00} egyenes $90^\circ - \alpha$ szöggel hajlik f -hez (vagyis párhuzamos pl. u_1 -gyel), ekkor egy pont van rajta. A felező merőlegesnek ez a két helyzete párhuzamos a hiperbola egy-egy aszimptotájával, a megfelelő n_0 , n_{00} egyenes pedig maga a két aszimptota, és metszéspontjuk a hiperbola középpontja. Ekkor ugyanis

$$FU_0 = \frac{d}{\sin \alpha} \quad \text{és} \quad FO = \frac{FU_0}{\sin \alpha} = \frac{d}{\sin^2 \alpha},$$

ami a fentiek szerint a c excentricitás. – Így a hiperbola minden pontját két különböző U -ból kapjuk meg.

II. megoldás. Tovább használjuk az I. megoldás jelöléseit, és azt az eredményt, hogy azoknak a P pontoknak a mértani helyét kell meghatároznunk, amelyeknek az f egyenestől mért $t = PQ$ távolsága egyenlő a F ponttól mért $r = PF$ távolságuk λ -szorosával, ahol $\lambda = \cos \alpha$, azaz amelyekre

$$t = \lambda r = r \cos \alpha.$$

Válasszuk meg úgy a koordináta-rendszert, hogy az x tengely pozitív iránya megegyezzen a F -ből induló, f -re merőleges e félegyenes irányával, az y tengely pedig f legyen. Ezek szerint F koordinátái: $F(-d; 0)$. Egy tetszőleges $P(x, y)$ pontra

$$t = |x|, \quad r = \sqrt{(x+d)^2 + y^2},$$

P tehát akkor és csakis akkor tartozik a vizsgált mértani helyhez, ha koordinátáira

$$|x| = \lambda \sqrt{(x+d)^2 + y^2}$$

teljesül. Mivel mindkét oldalon pozitív szám áll, egyenletünk ekvivalens az

$$(3) \quad x^2 = \lambda^2 \{(x+d)^2 + y^2\}$$

egyenlettel, amelyből rendezve és teljes négyzetté kiegészítve, a $d > 0$ feltétel mellett az

$$\frac{(1-\lambda^2)^2 \left(x - \frac{\lambda^2 d}{1-\lambda^2}\right)^2}{\lambda^2 d^2} - \frac{y^2 (1-\lambda^2)^2}{d^2} = 1$$

egyenletet kapjuk. Ez hiperbola egyenlete, centrumának koordinátái

$$x_0 = \frac{\lambda^2 d}{1-\lambda^2} = \frac{d \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}; \quad y_0 = 0,$$

valós tengelye az x tengely, és paraméterei a szokásos jelöléssel

$$a = \frac{\lambda d}{1-\lambda^2} = \frac{d \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}, \quad b = \frac{d}{\sqrt{1-\lambda^2}} = \frac{d}{\sin \alpha},$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{d}{1-\lambda^2} = \frac{d}{\sin^2 \alpha} = d + x_0,$$

tehát egyik fókusza a F pont. Mivel $\frac{a}{b} = \tan \alpha$, eredményünkéből az is leolvasható, hogy az aszimptoták a valós tengellyel α nagyságú szöget zárnak be, és könnyen látható az I. megoldásnak az az eredménye is, hogy a F pontnak az aszimptotákra eső merőleges vetülete rajta van f -en.

Ha $d = 0$, akkor (3)-ból az

$$(1-\lambda^2)x^2 = \lambda^2 y^2,$$

$$\sqrt{1-\lambda^2} \cdot |x| = \lambda \cdot |y|$$

egyenletet kapjuk: ez két egyenes egyenlete, melyek átmennek az origón, a tengelyre tükrözve egymásba mennek át, és iránytangensük abszolút értéke

$$\frac{1}{\lambda} \sqrt{1-\lambda^2} = \tan \alpha,$$

tehát az x tengellyel bezárt szögük α .

III. megoldás. Ismét az I. megoldásbeli jelöléseket használjuk és feltesszük, hogy $d > 0$ (a $d = 0$ esetben a 2. ábra mutatja a megoldást). Vegyünk fel tetszőlegesen egy k kört, mely eleget tesz a feladat követelményeinek, és invertáljuk a F pont körüli tetszőleges körre, inverzét jelöljük k' -vel, f inverze pedig az f' -vel jelölt, q sugarú kör legyen (6. ábra).



Keressük tehát azon körök középpontjainak mértani helyét, melyek F -en átmennek, és k_0 érintik. Jelöljük k_0 középpontját F_1 -gyel, sugara legyen $2a$, akkor a mértani hely minden P pontjára

a mértani hely tehát hiperbola, melynek két fókuszja F és F_1 , valós tengelyének hossza $2a$.