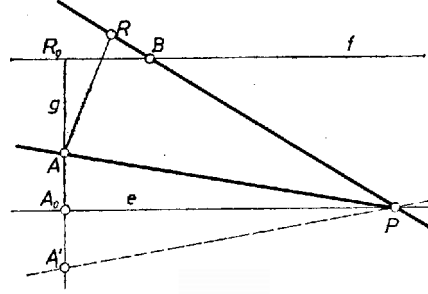


I. megoldás. a) Ha a P pont távolodik az adott e egyenesen az A pont e -n levő A_0 vetületétől, a BPA_0 szög egyre kisebb lesz, a BP egyenes egyre jobban megközelíti a B -n át e -vel párhuzamosan húzott f egyenest (1. ábra).

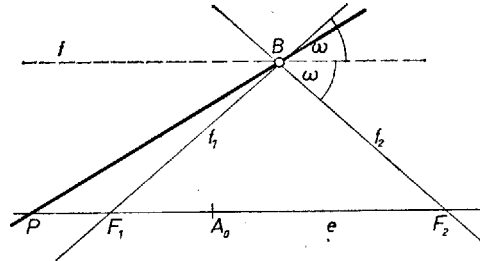


1. ábra

Az egyenlő szárú APR háromszög P -nél levő szöge is egyre kisebb lesz, az AR alapon levő szögei pedig 90° -hoz tartanak. Az AR egyenes így egyre közelebb lesz az A -n átmenő, e -re merőleges g egyeneshez. Ezek alapján azt várjuk, hogy R határhelyzete az f és g egyenesek R_0 metszéspontja lesz.

Sejtésünket a következő módon mondhatjuk ki pontosan: tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan d , hogy minden olyan P pontra, melyre $A_0P > d$, teljesül, hogy $R_0R < \varepsilon$. Ezt fogjuk bizonyítani, előbb azonban a PR , AR egyenesekre vonatkozó állításainkat látjuk be. Feltehetjük, hogy A és B különböző pontok, ellenkező esetben ugyanis P minden helyzeténél az A , B , R , R_0 pontok azonosak; továbbá azt is, hogy B nincs rajta e -n.

b) Az, hogy a BP egyenes tart f -hez, esetünkben pontosabban azt jelenti, hogy tetszőleges $\omega > 0$ -hoz van olyan d , hogy ha $A_0P > d$, akkor a BP és f egyenesek szöge kisebb ω -nál, azaz a BP egyenes a B ponton átmenő, f -fel ω szöget bezáró f_1 , f_2 egyenesek közti csúcshög-tartomány belsejében halad (természetesen $\omega < 90^\circ$; 2. ábra).



2. ábra

Az f_i egyenesek e -vel alkotott metszéspontját F_i -vel jelölve ($i = 1, 2$), a PB egyenes akkor és csak akkor halad az f_1 , f_2 egyenesek által létesített szögtartományok közül az f -et tartalmazóknak a belsejében, ha P az e egyenesnek az F_1F_2 szakaszon kívüli félegyenesein helyezkedik el. Legyen d az A_0F_1 , A_0F_2 távolságok közül a nagyobbik, ekkor az $A_0P > d$ egyenlőtlenségből következik, hogy P kívül van az F_1F_2 szakaszon, hiszen az F_1F_2 szakasz egyik pontja sincs A_0 től d -nél távolabb. d -nek ez az értéke tehát megfelelő, ezzel a BP egyenesre vonatkozó állításunkat bebizonyítottuk.

c) Az AR egyenesre vonatkozó állításunkat hasonlóan fogalmazhatjuk meg pontosabban: tetszőleges ω hegyesszög-höz van olyan d , hogy ha $A_0P > d$, akkor az AR és g egyenesek közti szög kisebb ω -nál.

Válasszuk az ω_1 , ω_2 hegyesszögeket egyelőre tetszőlegesen; láttuk, hogy van olyan d_1 , hogy ha $A_0P > d_1$, akkor a BP és f egyenesek szöge (ami egyenlő BP és e szögével) kisebb ω_1 -nél. Hasonlóan van olyan d_2 , hogy ha $A_0P \geq d_2$, akkor $APA_0 < \omega_2$. Ha mármost A_0P a d_1 -nél is, d_2 nél is nagyobb, akkor $APR < \omega_1 + \omega_2$, hiszen az APR szög az RPA_0 , APA_0 szögeknek vagy az összegével vagy a különbségével egyenlő (aszerint, hogy A és B az e -nek két oldalán vagy ugyanazon oldalán van), így nem lehet nagyobb e szögek összegénél. Ha pedig $APR < \omega_1 + \omega_2$, akkor

$$PAR < 90^\circ - \frac{1}{2}APR < 90^\circ - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Az AR és g egyenesek közti szög nem lehet nagyobb, mint annak a két szögnek az összege, amelyek közül az egyik az AP és e egyenesek szöge, a másik pedig $\frac{1}{2}APR$, amennyivel a $PAR < 90^\circ$ -nál kisebb. Így az AR és g egyenesek közti szög kisebb, mint

$$\omega_1 + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{3\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Ha tehát ω_1 -et és ω_2 -t egyenlőnek választjuk $\omega/2$ -vel, akkor ez a szög kisebb ω -nál, hacsak $A_0P > d$, ahol $d = \max(d_1, d_2)$.

Bizonyításunk közben láttuk, hogy d -nek ez a választása azt is biztosítja, hogy a BP , f egyenesek szöge kisebb legyen ω_1 -nél, tehát ez a szög is kisebb ω -nál.

The diagram shows a central point R_0 within a square frame. A point Q is located at the top-left corner. A quadrilateral $Q_{12}Q_{21}Q_{22}Q_{11}$ is inscribed within the frame. Lines connect Q to Q_{12} and Q_{21} . A line g passes through R_0 and Q . A line f passes through R_0 and Q_{12} . A line h passes through R_0 and Q_{22} . A line g_1 passes through R_0 and Q_{21} . A line g_2 passes through R_0 and Q_{11} . A line f_1 passes through R_0 and Q_{12} . A line f_2 passes through R_0 and Q_{22} . Angles ω_1 and ω_2 are indicated at R_0 . A line ε is also shown passing through Q and Q_{12} .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y_R = b.$$

Hasonlóan, a számláló konjugáltjával bővítve, majd a legutóbbihoz hasonló meggondolás-sorozattal

$$\begin{aligned}
 x_R &= \frac{x(\sqrt{x^2 + b^2} - \sqrt{(x-d)^2 + a^2})}{\sqrt{x^2 + b^2}} = \frac{x(x^2 + b^2 - (x-d)^2 - a^2)}{\sqrt{x^2 + b^2}(\sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{(x-d)^2 + a^2})} = \\
 &= \frac{2dx^2 + (b^2 - d^2 - a^2)x}{(x^2 + b^2) + \sqrt{(x^2 + b^2)\{(x-d)^2 + a^2\}}} = \frac{2d + \frac{b^2 - d^2 - a^2}{x}}{1 + \left(\frac{b}{x}\right)^2 + \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{b}{x}\right)^2\right\}\left\{\left(1 - \frac{d}{x}\right)^2 + \left(\frac{a}{x}\right)^2\right\}}},
 \end{aligned}$$

a nevező határértéke 2, a számlálóé $2d$, és így

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x_R = d.$$

Minthogy mindkét határérték létezik, azért a keresett határhelyzet is létezik, és koordinátái (d, b) , tehát a határhelyzet az A -n át az y tengellyel és B -n át az x tengellyel párhuzamosan húzott egyenesek metszéspontja, az I. megoldásbeli R_0 pont.

Sashegyi László (Tatabánya, Árpád Gimn., III. o. t.)

Bihari Imre (Debrecen, Fazekas M. Gimn., III. o. t.)