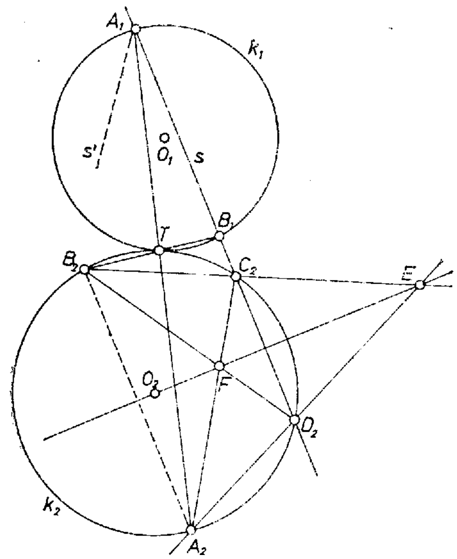
I. megoldás. Megmutatjuk, hogy az analóg feladat két kör esetén is megoldható: ha adott két érintkező kör, k_1 és k_2, és érintkezési pontjuk T, akkor megszerkeszthetünk egy olyan egyenest, amelyik átmegy k_2 középpontján, O_2.

Felhasználjuk, hogy k_1 és k_2 centrálisan hasonló helyzetűek T-re mint középpontra vonatkozóan.

Olyan s segédegyenesből indulunk ki, amely k_1-et és k_2-t az egymástól különböző A_1, B_1, C_2, D_2 pontokban metszi, ebben a sorrendben. Messe a TA_1, TB_1 egyenes k_2-t az A_2, ill. B_2 pontban. Ezek s megválasztása folytán egymástól különbözők és az A_2B_2 húr az A_1B_1 húr megfelelője, tehát párhuzamosak. Így pedig az $A_2B_2C_2D_2$ négyszög húrtrapéz k_2-ben, szárainak E és átlóinak F metszéspontját összekötve k_2-nek s-re merőleges átmárőegyenesét kapjuk (1. ábra).



1. ábra

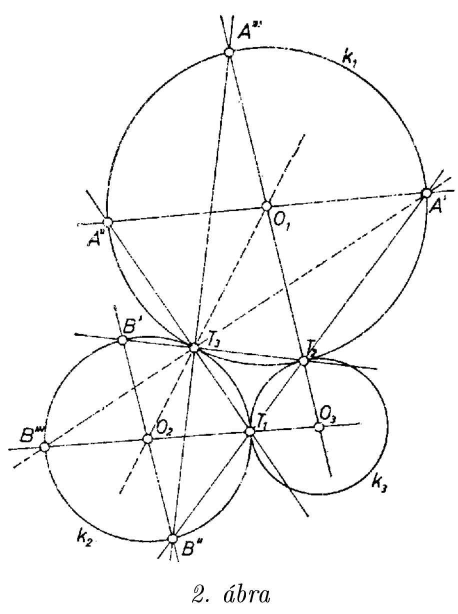
Egy, az s-sel nem párhuzamos s'-ből kiindulva az új átmérőegyenes metszi az előbbit a keresett O_2-ben. (Célszerű s'-t is pl. A_1-en át fölvenni, így a megismétlésben A_2 ismét felhasználható.)

Az olvasóra hagyjuk annak átgondolását, hogy a felhasznált húrtrapéz szárai az s-nek csak különleges megválasztása esetében adódnának párhuzamosnak, ennélfogva E általában létrejön.

Prőhle Tamás (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Legyen a három kör k_1, k_2, k_3, és k_1 és k_2 érintkezési pontja T_3, k_2 és k_3-é T_1, k_3 és k_1-é T_2. Ezek különböző pontok, mert kettő egybeesése esetén a harmadik körpár is ugyanott érintené egymást, ekkor pedig legalább egyik kör belülről érintene egy másikat. Ugyanezért az sem lehet, hogy a 3 érintkezési pont egy egyenesen legyen, eszerint a pontok egy háromszög csúcsai. Legyen k_i keresett középpontja O_i ($i = 1,\ 2,\ 3$), az előbbiek szerint ezek egyike sincs rajta két érintési pont összekötő egyenesén és a 3 középpont háromszöget alkot.

Messe k_1-et a T_1T_2 egyenes A'-ben, T_1T_3 pedig A''-ben (2. ábra).



2. ábra

Belátjuk, hogy $A'A''$ a k_1-nek átmérője. Ugyanis a T_2O_1A' és $T_2O_3T_1$ egyenlő szárú háromszögekben az alapok T_2 közös végpontjánál levő egy-egy szög egymás csúcsszöge, ezért a két háromszög hasonló és csúcsaikat a mondott felsorolás rendjében feleltetve meg egymásnak, körüljárásuk egyező irányú. És mivel a megfelelő csúcs-párok összekötő egyenese átmegy T_2-n, azért a két háromszög centrálisan hasonló helyzetű is T_2-re mint középpontra nézve. Ezért $A'O_1 \parallel T_1O_3$. Hasonlóan T_3O_1A'' és $T_3O_2T_1$ a T_3 centrumra nézve középpontosan hasonló helyzetű háromszögek, ezért $A''O_1 \parallel T_1O_2$. Ámde O_2, T_1 és O_3 egy egyenes pontjai, ezért az O_1A', O_1A'' sugarak egymás meghosszabbításába esnek, $A'A''$ a k_1-nek valóban átmérője, éspedig párhuzamos az O_2O_3 egyenessel.

Ugyanígy kapjuk k_2-nek az O_1O_3-mal párhuzamosan haladó $B'B''$ átmérőjét. És mivel k_1 és k_2 centrálisan hasonló helyzetűek T_3-ra mint középpontra, azért $B'B''$-nek k_1-beli megfelelője k_1-nek újabb, $A'A''$-től különböző átmérőjét adja és a két átmérő metszéspontja O_1.

B' mondott megfelelője T_2, B''-ét pedig $B''T_3$ metszi ki – legyen ez A''' –, s ekkor az átmérő T_2A'''.

Összefoglalva: O_1 kijelölése céljára a következő 6 egyenest rajzoltuk meg (az egyenes jele után zárójelben adjuk meg az általa meghatározott pontokat): T_1T_2 (A', B''), T_1T_3 (A''), $A'A''$, T_2T_3 (B'), $B''T_3$ (A'''), T_2A''' (O_1). A további két középpont a következő 3 egyenes megrajzolásával adódik: $A'T_3$ (B'''), $B'B''$, $B'''T_1$ (O_2, valamint O_3 a T_2A'''-ből).

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Szokoli István (Miskolc, I. sz. Ipari Szakközépisk., IV. o. t.)
Hima Tamás (Budapest, Veres Pálné Gimn., I. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az $A'A''$ egyenes átmérő voltának bizonyítása nem korlátozódva a csak külső érintkezések esetére – az 1950. évi Kürschák-verseny 2. feladata volt. [1]

2. A fenti bizonyítás a gimnáziumi I. osztályos tananyag ismeretében is elmondható (hasonlóság és hasonló helyzet nélkül: az $A'O_1A''$ szög egyenlő az $O_3O_1O_2$ háromszög szögeinek összegével stb.).

Szabados György (Veszprém, Lovassy L. Gimn., I. o. t.)

[1] L. *Hajós György–Neukomm Gyula–Surányi János:* Matematikai versenytételek, II. rész, 2. bővített kiadás, Budapest, Tankönyvkiadó, 1965., 99. oldal.