

A javaslat 2 számadatot ír elő a háromszögre és 2 tulajdonságot, az utóbbiak egy-egy összefüggést jelentenek az oldalak, ill. a szögek között. Ez több a szükséges 3 adatnál, azért annyit mindjárt kimondhatunk, hogy a követelmények együttese vagy ellentmondó, vagy egy fölösleges adatot tartalmaz. Megmutatjuk, hogy az ellentmondás esete áll fenn.

A szögek közti összefüggés alapján a nagyságra nézve középső szög 60° . Az oldalak pedig $b - d$, b , $b + d$ alakban írhatók ($d < b$) és b a 60° -os szöggel fekszik szemben. Erre az oldalra írva fel a cosinustételt:

$$b^2 = (b - d)^2 + (b + d)^2 - 2(b^2 - d^2) \cdot \frac{1}{2} = b^2 + 3d^2$$

amiből $d = 0$, a háromszög egyenlő oldalú.

Így pedig az oldal hosszára a területképletből más eredmény adódik, mint a körülírt kör sugarára érvényes összefüggésből:

$$t = \frac{b^2 \sqrt{3}}{4} = 50 - \text{ből} \quad b = \sqrt{\frac{200}{\sqrt{3}}} = 10,7 \text{ cm},$$

$$r = \frac{b}{2 \sin 60^\circ} = \frac{b}{\sqrt{3}} = 10 - \text{ből} \quad b = 10\sqrt{3} = 17,3 \text{ cm}.$$

Eszerint a javaslat – ebben a formájában – nem tűzhető ki.

Érdembeni bírálathoz hozzátartozik az is, hogy tartalmazzon javaslatot a helyreigazításra. Megvizsgáljuk, hogy a feladatban szereplő 4 feltétel közül hármát megtartva, milyen feladatot kapunk. Ha a szögekről is, az oldalakról is feltesszük, hogy számtani sorozatot alkotnak, akkor – mint már láttuk – a keresett háromszög szabályos, szögei eleve ismertek, oldalait pedig bármelyik további adat meghatározza. Ebben az esetben a feladat tehát burkoltan annak a bizonyítását követeli meg, hogy a szögek és az oldalak csak akkor alkothatnak egyszerre számtani sorozatot, ha a háromszög szabályos.

Ha csak a szögekről tesszük fel, hogy számtani sorozatot alkotnak, akkor közülük az egyik – mondjuk β – továbbra is 60° -os és a

$$T = 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

összefüggés alapján a másik két adat a szögek sinusainak a szorzatát határozza meg. Ebből a szögek meghatározhatók: $\alpha = 60^\circ - \omega$, $\gamma = 60^\circ + \omega$ jelöléssel

$$\sin \alpha \sin \gamma = \cos 2\omega - \cos 120^\circ = \frac{T}{2r^2 \sin 60^\circ},$$

$$\cos 2\omega = \frac{T}{r^2 \sqrt{3}} - \frac{1}{2},$$

ahonnan ω , majd α és γ meghatározható, végül az oldalakat az

$$a = 2r \sin \alpha, \quad b = 2r \sin \beta, \quad c = 2r \sin \gamma$$

összefüggésekből kaphatjuk meg.

Végül ha csak az oldalakról tesszük fel, hogy számtani sorozatot alkotnak, akkor az $a = b - d$, $c = b + d$ jelöléssel Heron képlete alapján

$$t^2 = \frac{3b^2}{4} \left(\frac{b^2}{4} - d^2 \right),$$

és a körülírt kör sugarának ismert képletéből

$$r = \frac{abc}{4t} = \frac{b(b^2 - d^2)}{4t}.$$

Mindkettőből d^2 -t kifejezve b -re a

$$9b^4 - 48rtb + 16t^2 = 0$$

egyenletet kapjuk, aminek a megoldása nem vezethető vissza másodfokú egyenletek megoldására.

A módosításokból tehát lényegében 3 feladatot kaptunk, az első elég könnyű, a második közepes nehézségű, a harmadik viszont túlmegy a középiskolai anyagon (lehetséges pl. közelítő megoldása a negyedfokú egyenlet megoldására közelítő eljárást keresve, $b = 13,26$ cm). Legcélszerűbbnek a második változat kitűzése látszik.

Maróti György (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., IV. o. t.)