

**I. Megoldás.** Legyenek a polinom zérushelyei  $x_1, x_2$  úgy, hogy  $|x_1| \leq |x_2|$ , így  $ab \neq 0$  miatt mindenesetre  $|x_2| > 0$ . A gyökök szimmetrikus függvényei alapján  $c = ax_1x_2$ ,  $b = -a(x_1 + x_2)$ , ezeket kifejezésünkbe behelyettesítve

$$2 \cdot \left| \frac{c}{b} \right| = \frac{2|x_1| \cdot |x_2|}{|x_1 + x_2|} \geq \frac{2|x_1| \cdot |x_2|}{|x_1| + |x_2|} \geq \frac{2|x_1| \cdot |x_2|}{2|x_2|} = |x_1|,$$

amit bizonyítanunk kellett. Felhasználtuk, hogy összeg absz. értéke legfőljebb akkora, mint tagjai absz. értékének összege (akkor ennyi, ha mindegyik tag előjele egyenlő, ideértve az esetleges 0 tagokat is), továbbá hogy a számláló nem negatív.

*Péter Erika* (Dombóvár, Gőgös I. Gimn., III. o. t.)

*Tarsó Béla* (Veszprém, Lovassy L. Gimn., II. o. t.)

*Megjegyzések.* 1. Az állítás  $a = 0$  esetén is érvényes, ekkor az egyetlen gyökre

$$|x_1| = \left| -\frac{c}{b} \right| \leq 2 \cdot \left| \frac{c}{b} \right|.$$

2. Nem használtuk ki, hogy a gyökök valósak, bizonyításunk komplex gyökök, komplex együttthatók esetére is érvényes.

**II. megoldás.** Ha az  $f(x) = ax^2 + bx + c$  polinom gyökei valósak, akkor a feladat állításánál valamivel több is igaz: az egyenletnek van az  $x = 0$ ,  $x = -\frac{2c}{b}$  végpontok által közrefogott (a  $c = 0$  esetben egyetlen pontot tartalmazó) zárt intervallumban gyöke. E helyeken ugyanis  $f(x)$  értéke

$$f(0) = c, \quad \text{ill.} \quad f\left(-\frac{2c}{b}\right) = c \cdot \frac{4ac - b^2}{b^2}.$$

Ha tehát  $4ac - b^2 = 0$ , akkor a polinom egyetlen gyöke  $-\frac{2c}{b}$ . Ha pedig  $4ac - b^2 \neq 0$ , akkor amennyiben vannak valós gyökök, azok különbözők, és  $4ac - b^2 < 0$ . E két gyök  $c = 0$  esetén a 0 és  $-\frac{2c}{b}$  szám, ha pedig  $c \neq 0$ , akkor a 0 és  $-\frac{2c}{b}$  helyeken felvett függvényértékek ellentétes előjelűek, tehát  $f(x)$ -nek van köztük gyöke.

*Czédli Gábor* (Baja, III. Béla Gimn., III. o. t.)

*Kirchner Imre* (Budapest, Steinmetz M. Gimn., III. o. t.)

**III. megoldás.** A másodfokú egyenlet gyökképletéből akkor kapjuk a kisebb absz. értékű gyököt, ha  $-b$  és a négyzetgyök ellentétes előjelű, így

$$|x_1| = \left| \frac{|b| - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right| = \left| \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{2a(|b| + \sqrt{b^2 - 4ac})} \right| = \left| \frac{2c}{|b| + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| \leq \left| \frac{2c}{b} \right|.$$

Bővítettük a tört kifejezést a számláló konjugáltjával, majd a nevező második tagját elhagytuk. Az utolsó lépésből azt is látjuk, hogy egyenlőség egyrészt a  $c = 0$ , másrészt a  $b^2 - 4ac = 0$  esetben áll fenn, más szóval ha  $x_1 = 0$ , ill. ha  $x_1 = x_2 \neq 0$ .

*Nyilánszky Mihály* (Miskolc, Földes F. Gimn., III. o. t.)