

I. megoldás. Nyilvánvalóan $k \geq 3$, így az R , r_k és a szabályos k -szög a_k oldalának fele által alkotott derékszögű háromszögből

$$r_k = R \cos \frac{\pi}{k},$$

tehát (R -rel végigosztva) azt kell bizonyítanunk, hogy

$$(1) \quad (n+1) \cos \frac{\pi}{n+1} - n \cos \frac{\pi}{n} > 1 \quad (= \cos 0),$$

más szóval, hogy

$$n \left(\cos \frac{\pi}{n+1} - \cos \frac{\pi}{n} \right) > \cos 0 - \cos \frac{\pi}{n+1}.$$

Mindkét különbség pozitív, így ez az egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha a bal és jobb oldalának hányadosa nagyobb, mint 1. Szorzattá alakítással

$$(2) \quad \frac{n \left(\cos \frac{\pi}{n+1} - \cos \frac{\pi}{n} \right)}{\cos 0 - \cos \frac{\pi}{n+1}} = \frac{n \sin \frac{\pi/2}{n(n+1)}}{\sin \frac{\pi/2}{n+1}} \cdot \frac{\sin \frac{2n+1}{n} \cdot \frac{\pi/2}{n+1}}{\sin \frac{\pi/2}{n+1}}.$$

Itt a második tényező nagyobb 1-nél, hiszen egyrészt

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} < 1,$$

ezért

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2n+1}{n} \cdot \frac{\pi/2}{n+1} > \frac{\pi/2}{n+1} > 0,$$

másrészt mert a sinus függvény a $(0, \pi/2)$ nyitott intervallumban monoton növekvő és pozitív.

(2) első tényezője egyszerűbben így írható

$$(3) \quad \frac{n \sin x}{\sin nx},$$

ahol

$$x = \frac{\pi/2}{n(n+1)} \quad \text{és így} \quad 0 < x < nx < \frac{\pi}{2};$$

erről teljes indukcióval mutatjuk meg, hogy mindig nagyobb 1-nél, ha n természetes szám.

$n = 2$ esetén, $0 < \cos x < 1$ alapján

$$2 \sin x > 2 \sin x \cos x = \sin 2x,$$

állításunk helyes. Feltéve mármost, hogy az n természetes számra (3) értéke nagyobb 1-nél, vagyis hogy más alakban

$$(0 <) \sin nx < n \sin x, \text{ akkor}$$

$$\begin{aligned} \sin(n+1)x &= \sin nx \cos x + \cos nx \sin x < \sin nx + \sin x < \\ &< n \sin x + \sin x = (n+1) \sin x, \end{aligned}$$

tehát a tulajdonság valóban öröklődik (a cosinusok helyett 1-et írva mindkét szorzatot nagyobbbal pótoltuk).

Ezek szerint (2) mindig nagyobb 1-nél, és ez az előrebecsítettak szerint egyértelmű a feladat állításával.

Gáspár Gyula (Miskolc, Herman O. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. Alsó korlátot kapunk $\cos(\pi/m)$ -re, ha (1)-et felírjuk az $n+1 = 4, 5, \dots, m$ értékekre és a kapott egyenlőtlenségeket összeadjuk. Átrendezéssel

$$\begin{aligned} m \cos \frac{\pi}{m} &> (m-3) + 3 \cos \frac{\pi}{3} = m - \frac{3}{2}, \\ \cos \frac{\pi}{m} &> 1 - \frac{3}{2m} \quad (m \geq 4). \end{aligned}$$

Jobb a becslés, ha csak az $n+1 = 7, 8, \dots, m$ értékekre szorítkozunk

$$\begin{aligned} m \cos \frac{\pi}{m} &> (m-6) + 6 \cos \frac{\pi}{6} > m - 1, \\ \cos \frac{\pi}{m} &> 1 - \frac{1}{m} \quad (m > 7). \end{aligned}$$

Az iskolai függvénytáblázatok¹ 18. táblázata (58. o.) ϱ/r oszlopának adatai szerint $m \geq 10$ -re már $\cos \pi/m > 1 - 1/2m$ is áll, $m \geq 15$ -re pedig $1 - 1/3m$ is.

II. megoldás. Legyen röviden

$$\frac{\pi}{n+1} = \alpha, \quad \frac{\pi}{n} = \beta, \quad \text{azaz} \quad n+1 = \frac{\pi}{\alpha}, \quad n = \frac{\pi}{\beta}.$$

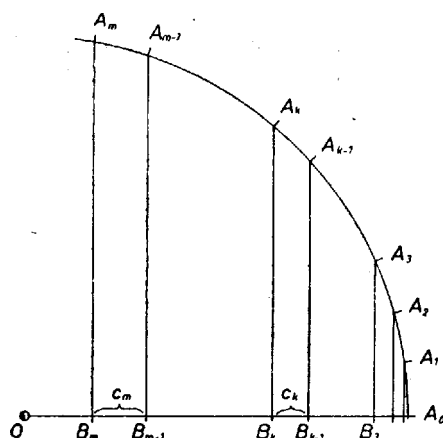
Ezeket (1)-be beírva, majd π -vel osztva a bizonyítandó egyenlőtlenség (csupa megfordítható átalakítással) így írható:

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \cos \alpha - \frac{1}{\beta} \cos \beta &> \frac{(n+1) - n}{\pi} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}, \\ \frac{1 - \cos \alpha}{-\alpha} &> \frac{1 - \cos \beta}{-\beta} \quad \left(0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Ha van olyan ω , melyre $\alpha = k\omega$, $\beta = m\omega$ ($k < m$, természetes számok), akkor (4) bizonyítása a következő: azt kell belátnunk, hogy

$$\frac{1 - \cos \alpha}{k\omega} < \frac{1 - \cos \beta}{m\omega}.$$

Legyen az egységsugarú, O középpontú kör A_0A_j ívéhez tartozó középponti szög $j\omega$ ($j = 1, 2, \dots, m$), és jelöljük az A_j pont vetületét az OA_0 egyenesen B_j -vel, a B_jB_{j-1} szakasz hosszát c_j -vel ($j = 1, 2, \dots, m$).



1. ábra

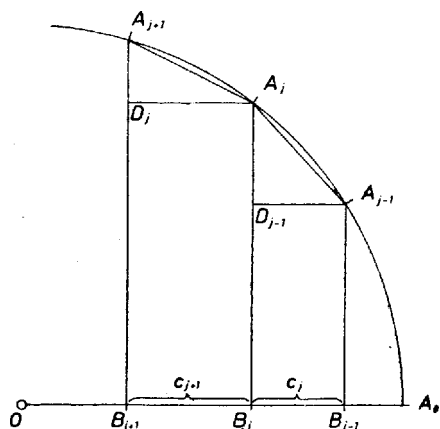
Mivel $\cos \alpha = OB_k$, $\cos \beta = OB_m$, azt kell megmutatnunk, hogy (1. ábra):

$$\frac{1}{k}(c_1 + c_2 + \dots + c_k) < \frac{1}{m}(c_1 + c_2 + \dots + c_m).$$

Megmutatjuk, hogy a c_j számok monoton nőnek:

$$c_{j+1} > c_j.$$

Legyen A_j , ill. A_{j-1} vetülete az $A_{j+1}B_{j+1}$, ill. A_jB_j egyenesen D_j , ill. D_{j-1} . Az $A_jD_jA_{j+1}$, $A_{j-1}D_{j-1}A_j$ derékszögű háromszögek átfogója egyenlő, az elsőnek A_{j+1} -nél levő szöge, $(j+1/2)\omega$, nagyobb, mint a másodikonak A_j -nél levő, $(j+1/2)\omega$ nagyságú szöge, tehát e szögekkel szemközti befogók közül az első a nagyobb, $A_jD_j > A_{j-1}D_{j-1}$, vagyis $c_{j+1} > c_j$ (2. ábra).



2. ábra

¹ Hack F.: Függvénytáblázatok, matematikai összefüggések. Tankönyvkiadó, Budapest, 1969.

Legyen most

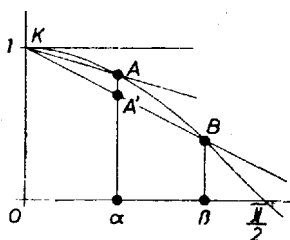
$$d_j = \frac{1}{j}(c_1 + c_2 + \dots + c_j),$$

akkor elegendő megmutatnunk, hogy $d_j < d_{j+1}$:

$$\begin{aligned} \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_j}{j} &< \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_j + c_{j+1}}{j+1}, \\ (j+1)(c_1 + c_2 + \dots + c_j) &< j(c_1 + c_2 + \dots + c_j + c_{j+1}) \\ c_1 + c_2 + \dots + c_j &< j c_{j+1}, \end{aligned}$$

ami valóban igaz, hiszen a bal oldali összeg minden tagja kisebb c_{j+1} -nél. Ezzel bebizonyítottuk (4)-et minden olyan esetre, amikor $\frac{\alpha}{\beta}$ racionális. Ez pedig feladatunkban fennáll, mert $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{n}{n+1}$.

Megjegyzések. 1. Szemléletes értelmezését adjuk (4)-nek. A két oldalon a $\cos x$ függvényt ábrázoló görbe két húrnak iránytangense áll, éspedig a $(0, \beta)$, ill. $(0, \alpha)$ intervallum fölötti KB , ill. KA görbeív végpontjait összekötő húrre (3. ábra).



3. ábra

Fogadjuk el a szemlélet alapján (azaz bizonyítás nélkül), hogy $\cos x$ grafikonja a $(0, \pi/2)$ intervallumban konkáv (alulról, vagyis az y tengely pozitív irányába nézve), ami azt jelenti, hogy bármely részívnek végpontjait összekötve, az ív a kapott húr fölött halad. Eszerint, az α pontbeli ordinátaegyenes és KB metszéspontját A' -vel jelölve, $\alpha A' < \alpha A$, így a KA' egyenes meredekebben süllyed, mint KA , tehát (4) bal oldala valóban nagyobb (kisebb abszolút értékű negatív szám), mint a jobb oldala.

Angyal József (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.)

2. Az elfogadott állítást némileg alátámasztja, hogy bármely x_1, x_2 -re, ha csak

$$-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2},$$

a $\cos x$ grafikonján az (x_1, x_2) intervallum fölötti ív végpontjait összekötő húr *felezőpontja* alatta van az ívnek. Ennek koordinátái ugyanis

$$\frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \frac{\cos x_1 + \cos x_2}{2},$$

és

$$\cos \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{\cos x_1 + \cos x_2}{2} = \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \left(1 - \cos \frac{x_2 - x_1}{2} \right) > 0,$$

mert mindkét tényező pozitív, hiszen

$$\frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

3. Más alátámasztása a konkávságnak: $\cos x$ deriváltja, érintőjének iránytangense $-\sin x$, és ez a mondott $(0, \pi/2)$ intervallumban monoton csökken, a görbe lefelé „kanyarodik” (a második derivált: $(\cos x)'' = -\cos x < 0$).