

Az x szám akkor és csakis akkor gyöke (1)-nek, ha az $y = [x]$ szám gyöke az

$$(2) \quad y^2 + ky + l = 0$$

egyenletnek. Kell tehát, hogy ennek az egyenletnek legyen egész gyöke. Mivel a két gyök összege $-k$, tehát szintén egész, ez csak úgy teljesülhet, ha mindkét gyök egész. Jelöljük ezeket n -nel és m -mel, feltehetjük, hogy $n \leq m$. Így (1) megoldásainak halmaza a balról zárt, jobbról nyílt $[n, n+1)$, $[m, m+1)$ intervallumok egyesítése. Ez akkor lesz egyetlen számköz, ha a két intervallum vagy csatlakozik egymáshoz, vagy ha azonosak, azaz ha $m = n+1$, vagy $m = n$.

A gyökök és együttthatók összefüggése alapján az első esetben

$$k = -(2n+1), \quad l = n(n+1),$$

a második esetben

$$k = -2n, \quad l = n^2.$$

Az első esetben k páratlan, és $n = -\frac{k+1}{2}$, ezért

$$l = \frac{k^2 - 1}{4},$$

a második esetben k páros, és $n = -\frac{k}{2}$, ezért

$$l = \frac{k^2}{4}.$$

Ezeknek az összefüggéseknek kell fennállniuk az együttthatók között k paritása szerint, közös alakjuk:

$$l = \left\lceil \frac{k^2}{4} \right\rceil.$$

Pl. $k = 10$ (és $l = 25$) esetén (1)-et a $[-5, -4)$ intervallum számai elégítik ki, $k = -7$ (és $l = 12$) esetén pedig a $[3, 5)$ intervallum számai.

Gönczi István (Miskolc, Földes F. Gimn., IV. o. t.)