

I. megoldás. I. Az első állítást a teljes indukció módszerével bizonyítjuk, az (1) bal oldalán álló kifejezést s_n -nel jelöljük. $n = 1$ esetén $s_1 = 1/2 + 1/3 + 1/4 = 13/12 > 1$, az állítás igaz. Ha mármost k olyan természetes szám, amelyre $s_k - 1 > 0$, akkor $k + 1$ esetében

$$\begin{aligned} s_{k+1} - 1 &= (s_k - 1) - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3(k+1)} + \frac{1}{3k+4} = \\ &= (s_k - 1) + \frac{1}{3k+2} - \frac{2}{3(k+1)} + \frac{1}{3k+4} = \\ &= (s_k - 1) + \left(\frac{1}{3k+2} - \frac{1}{3k+3} \right) - \left(\frac{1}{3k+3} - \frac{1}{3k+4} \right) = \\ &= (s_k - 1) + \frac{1}{(3k+2)(3k+3)} - \frac{1}{(3k+3)(3k+4)} = \\ &= (s_k - 1) + \frac{1}{3k+3} \left(\frac{1}{3k+2} - \frac{1}{3k+4} \right) > s_k - 1 > 0, \end{aligned}$$

mert az elhagyott tag pozitív, vagyis az állítás igaz volta átöröklődik k -ről $k + 1$ -re. Ezzel (1)-et igazoltuk.

II. Úgy választjuk meg r -et a

$$H_r = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{r}$$

összegben, hogy H_r egy adott A számnál nagyobb legyen. Ez negatív A esetén $r = 1$ -re is teljesül. Ha $A \geq 0$, feltehetjük, hogy pozitív egész, mert ha nem az, felkeresítjük a következő pozitív egészé. Ezután H_r -nek 1 utáni részét $A - 1$ olyan részösszegeből állítjuk össze, amilyen (1) bal oldalán áll, az elsőben n -et 1-nek választva. Az így fellépő utolsó tört nevezőjét választjuk r -nek. Ezzel a feladat második állítását lényegében már bebizonyítottuk.

Szemléletesebbé tesszük bizonyításunkat, közelebből meghatározzuk az A (pozitív egész) számhoz tartozó r -et.

H_r mondott k -adik szeletében (elsőnek az $1 = 1/1$ -et tekintjük) az utolsó tag nevezőjét a_k -val jelölve, ez 1-gyel nagyobb, mint az előző szeletbeli megfelelőjének, a_{k-1} -nek 3-szorosa, ennél fogva a szelet utolsó tagjának nevezője

$$(2) \quad a_1 = 1, \quad a_k = 3a_{k-1} + 1 \quad (k = 2, 3, \dots).$$

Eszerint

$$a_2 = 3 + 1 = \frac{3^2 - 1}{3 - 1} = 4, \quad a_3 = (3^2 + 3) + 1 = \frac{3^3 - 1}{2} = 13,$$

és a látható $a_k = (3^k - 1)/2$ szabályszerűséget általában igazolja (2), így az A sorszámú szelet utolsó tagjának nevezője

$$(3) \quad a_A = \frac{3^A - 1}{2} = r.$$

Eddig a határig véve a természetes számok reciprokát, összegük nagyobb A -nál.

Természetesen hasonlóan akkor is kijelölhetnénk elegendő számú természetes számot, ha mondjuk csak az 1000-nél nagyobbak közül választhatnánk.

III. Az előírt $A = 4,5$ -et 5-re kerekítve (3) szerint $r = 121$. Ha viszont észrevesszük, hogy $A - H_2 = 3$, egész szám, akkor (1)-et 3-szor alkalmazva a (2) rekurzív képlet alapján $n = 2$ -re, 7-re és 22-re, ezt írhatjuk:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{22}\right) + \left(\frac{1}{23} + \dots + \frac{1}{67}\right) = H_{67} > 4,5.$$

Bálint László (Budapest, Móricz Zs. Gimn., II. o. t.)

*

A továbbiakban csak az (1) állításra adunk más bizonyításokat.

II. megoldás. (1) bal oldala előlről és hátulról számított k -adik tagjának összege ($k = 1, 2, \dots, n$)

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{3n+2-k} &= \frac{4n+2}{\{2n+1-(n+1-k)\} \cdot \{2n+1+(n+1-k)\}} = \\ &= \frac{4n+2}{(2n+1)^2 - (n+1-k)^2} > \frac{2(2n+1)}{(2n+1)^2} = \frac{2}{2n+1}. \end{aligned}$$

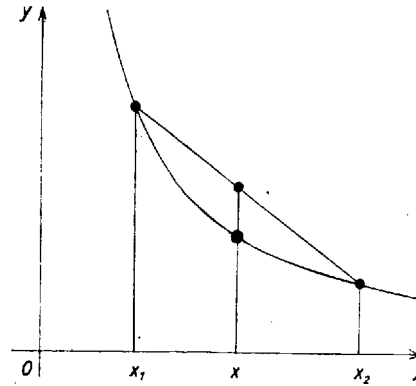
Ilyen pár n van, a középső $1/(2n+1)$ -nek nem jut pár. Így pedig

$$s_n > n \cdot \frac{2}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} = 1,$$

amit bizonyítanunk kellett.

Török István (Esztergom, Hell J. Bányagép. Techn., IV. o. t.)
Molnár József (Baja, III. Béla Gimn., II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A meg gondolás szemléletes megfelelője a következő: az $y = 1/x$ görbének az $x > 0$ tartomány fölötti íve (alulról, vagyis a pozitív y tengely irányába nézve) konvex, bármely részívének minden belső pontja alatta van a részív végpontjait összekötő húrnak.



1. ábra

Valóban, az $\left(x_1, \frac{1}{x_1}\right)$, $\left(x_2, \frac{1}{x_2}\right)$ pontokat összekötő szelő egyenlete (1. ábra):

$$y_h = \frac{1}{x_1} + \frac{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}}{x_2 - x_1}(x - x_1) = \frac{1}{x_1} - \frac{x - x_1}{x_1 x_2},$$

és így a húr és a görbe ordinátáinak különbsége az x_1 és x_2 abszcisszáik közti x pontban, vagyis ha $0 < x_1 < x < x_2$,

$$y_h - \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x}\right) - \frac{x - x_1}{x_1 x_2} = \frac{(x - x_1)(x_2 - x)}{x x_1 x_2} > 0.$$

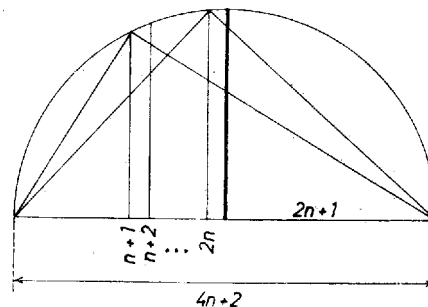
Ezt fent az

$$x_1 = n + k, \quad x_2 = 3n + 2 - k, \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2n + 1$$

értékhármas esetében láttuk, (5) - ha 2-vel osztjuk - azt fejezi ki, hogy az x -tengely és az $1/x$ görbe x_1 és x_2 abszcisszájú pontjaival meghatározott trapéz középvonala nagyobb, mint a görbének a középvonalon levő pontjához tartozó ordináta.

Hollós Gábor és Garay Barnabás (Sopron, Széchenyi I. Gimn., III. o. t.)

2. Hasonló a következő bizonyítás. Egy félkörív $4n + 2$ egységnyi átmérőjét egységnyi szakaszokra osztva, az $n + k$ és $3n + 2 - k$ részekre osztó pontban emelt merőlegesnek a körív alatti szakasza $k = 1, 2, \dots, n$ esetén kisebb a középpontban emelt merőleges megfelelő szakaszánál, ami pedig $2n + 1$; így a szakaszok négyzetére, ismert tétel szerint (2. ábra):



2. ábra

$$(n + k)(3n + 2 - k) < (2n + 1)^2.$$

Reciprokat véve és $4n + 2$ -vel szorozva ismét (5)-re jutunk:

$$\frac{(3n + 2 - k) + (n + k)}{(n + k)(3n + 2 - k)} = \frac{1}{n + k} + \frac{1}{3n + 2 - k} > \frac{2}{2n + 1}.$$

Fejes Gábor (Budapest, Kossuth L. Gimn., IV. o. t.)