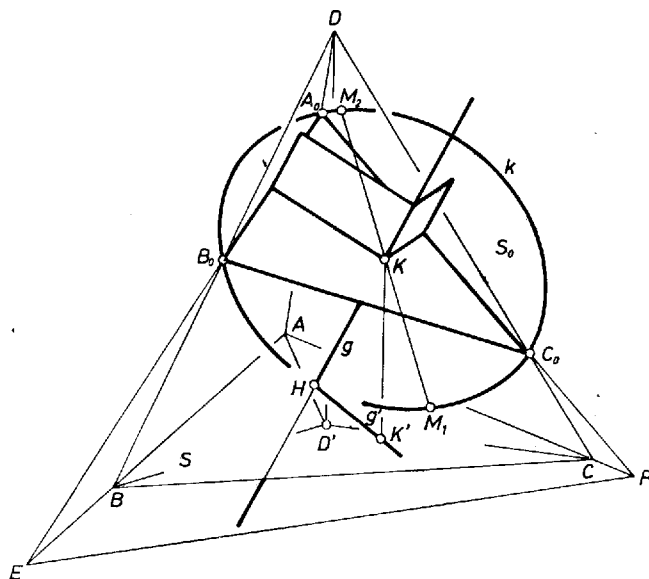


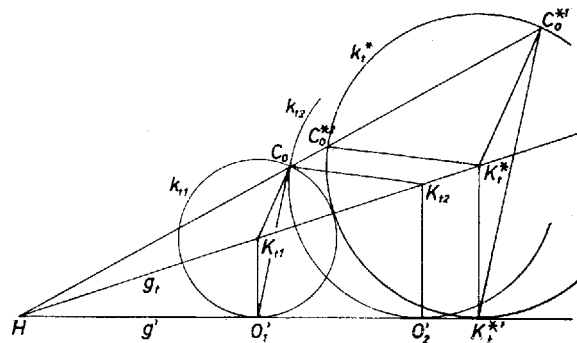
I. megoldás. I. Legyenek az előírt negyedelő pontok rendre A_0, B_0, C_0 (azaz pl. $DC_0 = 3DC/4$). Ezek nincsenek egy egyenesen, mert az A_0B_0 egyenes benne van a DAB síkban, C_0 pedig nincs benne (1. ábra), így ez a 3 pont egy síkot határoz meg, jelöljük ezt S_0 lal.



1. ábra

Legyen az $A_0B_0C_0$ háromszög köré írt k kör középpontja K , ekkor a háromszög csúcsaitól egyenlő távolságban levő pontok mértani helye a K -ban S_0 -ra állított g merőleges, ezért a keresett G gömb O középpontja g -n lesz, G -nek az S -en való O' érintési pontja pedig g -nek az $ABC = S$ alapsíkon levő g' vetületén lesz. Amennyiben G létezik, a k kör mindenestre rajta van G -n. (g nem merőleges S -re – csak akkor lenne merőleges, ha S_0 párhuzamos lenne S -sel, ez azonban nem áll, hiszen pl. A_0 és B_0 más-más távolságban van S -től –, ezért g' nem pont.) g' -t meghatározza g -nek (S -en való) H dőféspontja és K -nak K' vetülete. (H létrejön, mert g nem párhuzamos S -sel; akkor lenne párhuzamos vele, ha S_0 merőleges lenne S -re, vagyis ha A_0, B_0, C_0 -nak S -en levő vetülete egy egyenesbe esnék, ez viszont nem áll fenn, mert e három vetület az ABC szabályos háromszög köré írt körnek rendre a $D'A, D'B, D'C$ sugarán van – ahol D' a D csúcs vetülete – és annak rendre első, második, harmadik negyedelő pontja.)

Mindazok a gömbök, amelyek g' valamely pontjában érintik S -et és középpontjuk a g -n van, páronként egymás képei abban a H centrumú középpontos hasonlóságban, melynek aránymutatója egyenlő sugaraik arányával. A g' -n átmenő minden egyes sík (S -et kivéve) G -ből – és bármely az imént mondott gömbből is – kört metsz ki, és ez érinti g' -t, középpontja O -nak – ill. a gömb középpontjának – a metsző síkon levő vetülete. Válasszunk tetszés szerint egy ilyen S_t síkot és egyet a mondott gömbök közül, legyen ez (a G -től különböző) G^* . Ekkor a G -ből és G^* -ból S_t által kimetszett k_t, k_t^* körök is egymás képei a H centrumú, $R:R^*$ aránymutatójú (R, R^* a gömbök sugarai) középpontos hasonlóságban, K_t, K_t^* középpontjuk g -nek S_t -n levő g_t vetületén van (amely természetesen átmegy H -n, 2. ábra).

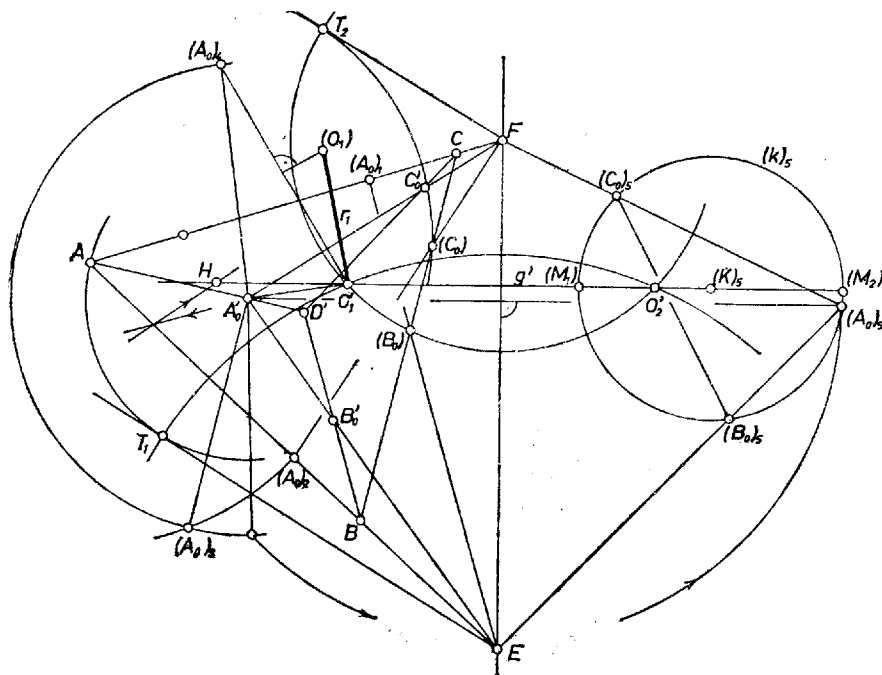


2. ábra

Ezek alapján a következő lépésekben kapjuk G -t. S_t -nek (pl.) az előírt C_0 -on átmenő síkot választjuk, g_t -nek egy tetszés szerinti K_t^* pontja körül a g' -t érintő k_t^* kört írunk, ezt metsszük a HC_0 egyenessel a C_0^{*1}, C_0^{*2} pontokban; (feltéve, hogy ezek létrejöttek) C_0 -on át párhuzamost húzunk $C_0^{*1}K_t^*$ -gal és $C_0^{*2}K_t^*$ -gal, ekkor a g_t -n kapott K_{t1}, K_{t2} metszéspontot át S_t -re (más szóval a g, g_t síkban g_t -re) állított merőleges g -ből kimetszi a keresett G_1, G_2 gömb O_1 , ill. O_2 középpontját, a gömb sugara pedig természetesen ennek S -től (más szóval g' -től) mért O_1O_1' , ill. O_2O_2' távolsága (3. ábra).

Ezután O -t az $O'A_0$ szakasz felező merőleges síkja metszi ki az S -re O' -ben állított merőleges egyenesből. (Ezzel megkapjuk a gömb OO' sugarát.)

Ügyes egyszerűsítésekkel a szerkesztés S -beli részét egyetlen ábrán belül végrehajthatjuk, a külső pontoknak S -en levő vetületét a pont jele mellé tett vesszővel jelöljük (5. ábra).



5. ábra

E -t nyilvánvalóan megadja AB és A_0B_0 közös pontja, de megkapjuk úgy is, hogy az ABD háromszöget AB körül úgy fordítjuk bele S -be, hogy D a C -be jusson. Ekkor A_0 -nak, B_0 -nak $(A_0)_1$, (B_0) új helyzete CA -nak első, ill. CB -nek második negyedelő pontja, és E -t kimetszi az $(A_0)_1(B_0)$ egyenes. Azért célszerűbb ez, mert így az EA_0 , EB_0 szakasz $E(A_0)_1$ -ben, $E(B_0)$ -ban mindjárt valódi nagyságban látszik. Mértani közepüket úgy szerkesztettük, hogy vettük az ET_1 érintőt az A'_0 középp., A -n átmenő körhöz. (Az olvasóra hagyjuk annak belátását, hogy ez a kör átmegy $(A_0)_1$ és (B_0) mindegyikén.)

Hasonlóan, az ACD háromszöget az ACB helyzetbe lefordítva az A_0C_0 egyenes új, $(A_0)_2(C_0)$ helyzete kimetszi AC -ből F -et, és az így valódi nagyságban látszó FA_0 , FC_0 szakaszok mértani középarányosa az az FT_2 érintő szakasz, amit az AC szakasz első negyedelőpontja körüli, (C_0) -on átmenő körhöz húztunk F -ből. A fent mondott két kör közös pontjai O'_1 , O'_2 . (Létezésük mutatja, hogy 2 megoldás van; megjegyezzük csupán, hogy ha a fenti k kör túlnyúlna az S síkon, akkor a két körnek nem lenne közös pontja.)

Megszerkesztettük ábránkon az O'_1 -ben érintő G_1 gömb sugarát is, az $O'_1O_1A_0$ síknak $O'_1A'_0$ körül a rajz síkjába való belefördítésével. Ehhez A_0 -nak S fölötti A'_0A_0 magasságát az $AA_0A'_0$ háromszögnek S -be, az $A(A_0)_3A'_0$ helyzetbe fordításával kaptuk, $(A_0)_3$ az A'_0 -ben A'_0A -ra állított merőleges és az A körüli, $AA_0 = A(A_0)_2$ sugarú kör metszéspontja. Ezt A'_0 körül ráfordítva az A'_0 -ben $O'_1A'_0$ -re állított merőlegesre, kaptuk A_0 -nak az $O'_1A'_0$ tengely körül S -be fordított $(A_0)_4$ helyzetét, végül az $(A_0)_4O'_1$ szakasz felező merőlegesével az O'_1 -ben $O'_1A'_0$ -re állított merőlegesből kimetszettük O_1 -nek S -be átfordított (O_1) képét. Így G_1 , sugara $O'_1(O_1)$.

Megjegyzések. 1. Az EF egyenes S és S_0 metszévonalára, e körül az $A_0B_0C_0$ háromszöget S -be fordítva megkapjuk valódi nagyságát: $(A_0)_5(B_0)_5(C_0)_5$. (A_0) -nak EF -től való távolsága annak a derékszögű háromszögnek az átfogója, melynek egyik befogója A_0 -nak fent megszerkesztett magassága, másik befogója pedig A'_0 -nek EF -től való távolsága. (K) -nak $(K)_5$ befördített helyzete természetesen az $O'_1O'_2$ egyenesen van, ami az I. megoldásbeli g' egyenes. Szemlélet szerint $C_0A_0 = C_0B_0$, de ez enélkül is könnyen belátható. Ez megkönnyíti k sugarának kiszámítását. Néhány, az I. megoldás szerint haladó dolgozat, erre támaszkodva mutatta meg, hogy k nem nyúlik át S túlsó oldalára.

2. Az I. megoldásbeli H pontot is könnyű megszerkeszteni két olyan egyenes metszéspontjaként, amelyet a g -t meghatározó felező merőleges síkok metszenek ki S -ből. Pl. A_0B_0 felező merőleges síkja S -et abban az egyenesben metszi, amelynek egy pontja a szakasz ABD síkbeli felező merőlegesének AB -n levő pontja (amit a fentiek szerint $(A_0)_1(B_0)$ felező merőlegese is kimetsz), és amely továbbá merőleges $A'_0B'_0$ -re. H természetesen szintén az $O'_1O'_2$ egyenesen adódik.