

I. Az adottakból kivonással adódó

$$x^2 - y^2 = (a - b)(x - y)$$

egyenletet akár (1)-gyel, akár (2)-vel összekapcsolva az eredetivel ekvivalens rendszert kapunk. Újabb alakítással

$$(x - y)(x + y - a + b) = 0,$$

ami két módon teljesül:

$$\begin{array}{ll} A) & \text{ha} \quad x - y = 0, \\ B) & \text{ha} \quad x + y - a + b = 0. \end{array}$$

Az A) esetben $y = x$, és ezt (1)-behelyettesítve

$$x^2 = (a + b)x, \quad x(x - a - b) = 0,$$

amiből az eredeti rendszer két megoldása:

$$(3) \quad x_1 = y_1 = 0, \quad x_2 = y_2 = a + b.$$

A B) esetben

$$(4) \quad x + y = a - b, \quad y = (a - b) - x,$$

és ezt (1)-be helyettesítve

$$(5) \quad x^2 - (a - b)x - b(a - b) = 0,$$

amiből újabb két megoldás számára

$$\begin{aligned} (6') \quad x_3 &= \frac{1}{2}(a - b - \sqrt{(a - b)(a + 3b)}), \\ x_4 &= \frac{1}{2}(a - b + \sqrt{(a - b)(a + 3b)}), \end{aligned}$$

és mivel (4) és (5) szerint egyaránt

$$x_3 + y_3 = x_4 + y_4 = x_3 + x_4 = a - b,$$

azért

$$(6'') \quad y_3 = x_4, \quad y_4 = x_3.$$

Ezzel az egyenletrendszert megoldottuk.

II. A (3) megoldások minden (valós) a, b értékpár esetén valósak, (6') és (6'') pedig akkor és csak akkor, ha a négyzetgyökjel alatti zárójeles tényezők előjele nem ellentétes; részletezve, ha vagy egyikük sem negatív:

$$a - b \geq 0 \quad \text{és} \quad a + 3b \geq 0,$$

azaz

$$a > 0 \quad \text{és} \quad -\frac{a}{3} \leq b \leq a,$$

vagy ha mindkét zárójelben negatív szám áll:

$$a - b < 0 \quad \text{és} \quad a + 3b < 0,$$

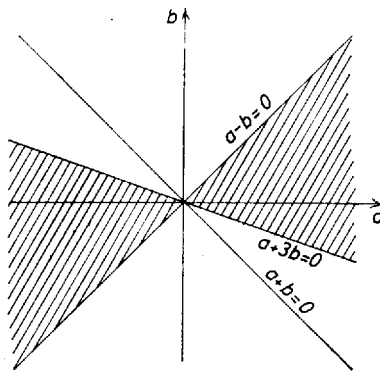
azaz

$$a < 0 \quad \text{és} \quad a < b < -\frac{a}{3}.$$

III. Ugyanezek felhasználásával azt is kapjuk, hogy mind a négy megoldás valós és különböző, ha

$$\begin{aligned} a > 0 \quad \text{és} \quad -\frac{a}{3} < b < a, \quad \text{vagy ha} \\ a < 0 \quad \text{és} \quad a < b < -\frac{a}{3}; \end{aligned}$$

ugyanis ezen egyenlőtlenségek teljesülése esetén a diszkrimináns pozitív, $x_3 \neq x_4 = y_3$, ugyanígy $x_4 \neq y_4$ és ezek a (3) megoldásoktól is különbözők, mert azokban $x = y$; továbbá a (3) alattiak egymástól is különbözők, mert az egyenlőtlenségek miatt $b \neq -a$, és így $x_2 = a + b \neq 0 = x_1$ (1. ábra).



1. ábra

$x_3 = x_4$ (és vele $y_3 = y_4$) kétféleképpen adódhat:

α) ha $a - b = 0$, ekkor azonosak az $x_1 = y_1 = 0$ megoldással, ezért a rendszernek 2 megoldása van, ha $a \neq 0$, és egyetlen megoldása, ha $a = 0$.

β) ha pedig $a + 3b = 0$, ekkor azonosak az $x_2 = y_2 = a + b$ megoldással, 2 megoldás van, ha $a \neq 0$.

Megjegyzés. Ha $b \neq 0$, akkor (1) is, (2) is a derékszögű koordinátarendszerben egy-egy parabola egyenlete, és ezek egymás tükörképei a tengelyek közti, $y = x$, azaz $y - x = 0$ egyenletű szögfelezőre nézve, hiszen x és y felcserélésével a két egyenlet átmegy egymásba. Így a rendszer megoldásai e két parabola legföljebb 4 közös pontjának koordinátái. Az (x_1, y_1) és (x_2, y_2) megoldások rajta vannak a tükrözés tengelyén. Az (x_3, y_3) , (x_4, y_4) megoldásokat összekötő, (4) egyenletű egyenes pedig merőleges a tükrözés tengelyére.