

I. megoldás. Válasszuk úgy a koordinátarendszert, hogy origója a közös fókusz legyen, és az első parabola tengelye legyen az y tengely. Ekkor az első parabola vezéregyenese az $y = -p$ egyenes, egyenlete

$$x^2 + y^2 = (y + p)^2$$

(a bal oldalon a fókusztól, a jobb oldalon a vezéregyenestől mért távolság négyzete áll), avagy

$$(1) \quad y = \frac{x^2 - p^2}{2p}.$$

Az x_0 ponthoz tartozó érintő meredeksége a függvény x_0 -beli differenciálhányadosával egyenlő: x_0/p , a parabola megfelelő érintőjének egyenlete:

$$y - \frac{x_0^2 - p^2}{2p} = \frac{x_0}{p}(x - x_0),$$

ahonnan rendezéssel:

$$(2) \quad x_0x - py - \frac{x_0^2 + p^2}{2} = 0.$$

Mivel a két parabola tengelye merőleges egymásra, a második parabola tengelye az x tengelyen van, egyenlete a fentiekhez hasonlóan

$$(3) \quad x = \frac{y^2 - q^2}{2q},$$

ahol q a fókusz és a vezéregyenes távolsága, és az y_0 ordinátájú ponthoz tartozó érintő egyenlete

$$(4) \quad -qx + y_0y - \frac{y_0^2 + q^2}{2} = 0.$$

A (2) és (4) egyenletek csak akkor határozzák meg ugyanazt az egyenest, ha egyik a másiknak valamely konstans-szorosa:

$$x_0 = -\lambda q; \quad -p = \lambda y_0; \quad \frac{x_0^2 + p^2}{2} = \lambda \frac{y_0^2 + q^2}{2},$$

ahonnan a λ konstansra a

$$(p^2 + q^2\lambda^2)(\lambda - 1) = 0$$

egyenletet kapjuk, és ennek egyetlen valós megoldása $\lambda = 1$, ekkor $x_0 = -q$, $y_0 = -p$, tehát a közös érintő egyenlete:

$$(5) \quad qx + py + \frac{p^2 + q^2}{2} = 0.$$

Feladatunk első állítását ezzel bebizonyítottuk.

Tekintsük most a két parabola egy-egy érintőjét. (2) és (4) alapján ezek csak akkor merőlegesek egymásra, ha

$$(6) \quad qx_0 + py_0 = 0,$$

akkor a két egyenes metszéspontja az

$$M\left(\frac{x_0 - q}{2}, \frac{y_0 - p}{2}\right)$$

pont, mely rajta van az (5) egyenesen.

Így tulajdonképpen feladatunk állításának a fordítottját láttuk be: a merőleges érintők metszéspontja az (5) alatti közös érintőn van. A fenti lépéseket fordított sorrendben elvégezve kapjuk a kívánt bizonyítást. Az (5) egyenes tetszőleges $M(x_1, y_1)$ pontjához válasszuk meg x_0 , y_0 értékét úgy, hogy

$$\frac{x_0 - q}{2} = x_1, \quad \frac{y_0 - p}{2} = y_1$$

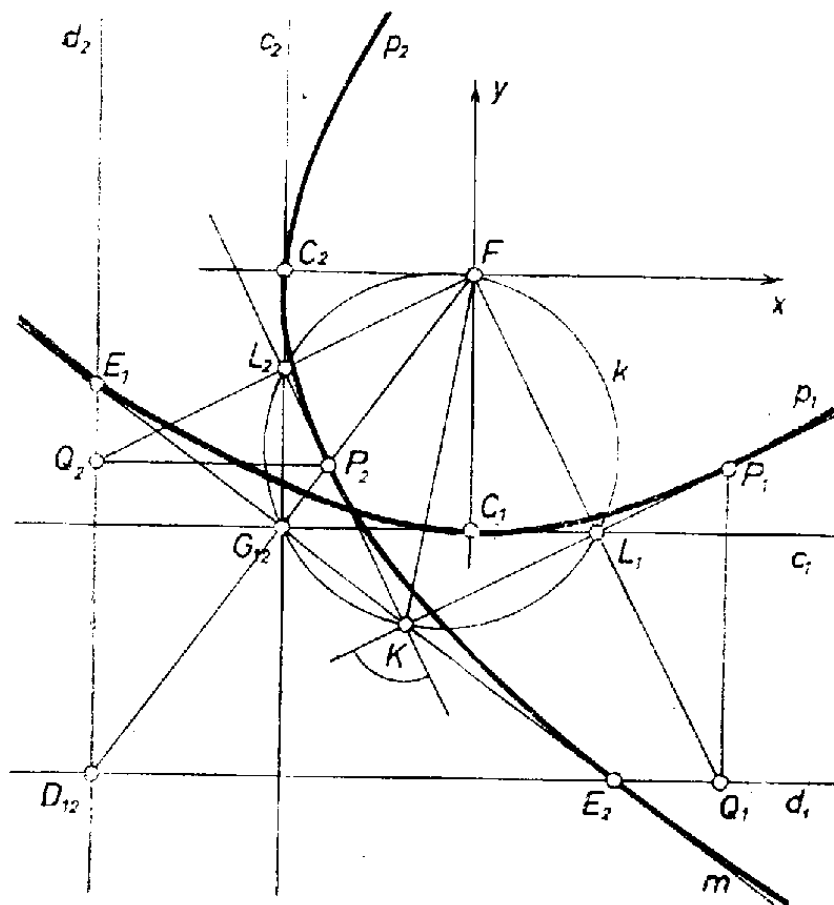
teljesüljön: az így kapott (2) és (4) egyenesek átmennek M -en és merőlegesek egymásra.

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy egy parabola P pontján átmenő érintő azonos P -nek a vezéregyenesen levő Q vetülete és az F fókusz közti FQ szakasz felező merőlegesével. Valóban, az I. megoldás (2) egyenlete által meghatározott Q koordinátái $(x_0, -p)$, az FQ szakasz felezőpontja $\left(\frac{x_0}{2}, -\frac{p}{2}\right)$, ez rajta van a (2) alatti érintőn, és az FQ egyenes egyenlete

$$px + x_0y = 0,$$

ez tehát merőleges (2)-re.

Esetünkben a két parabola tengelyének merőleges volta miatt d_1, d_2 vezéregyenesek is merőlegesek, és közös D_{12} pontjukat véve a mondott tételben Q szerepére, FD_{12} -nek m felező merőlegese – ahol F a két parabola közös fókuszát jelöli – mindkét parabolát érinti (1. ábra).



1. ábra

(Az is következik innen, hogy m a d_1 vezéregyenesű parabolát a d_2 -vel való metszéspontban érinti; a d_2 vezéregyenesű parabolát pedig a d_1 -gyel való metszéspontjában.)

Ha bizonyítás nélkül elfogadjuk, hogy a fenti Q -t d -n végigfuttatva a parabola minden érintőjét megkapjuk, akkor az állítás megfordítása így mondható ki: a parabola fókuszának bármely érintőre vett tükörképe rajta van a vezéregyenesen. Ebből következik, hogy két parabolának nincs további közös érintője.

Ismét más megfogalmazása a mondott tulajdonságnak a következő: az FQ szakasz G felezőpontjából minden olyan szakasz derékszögben látszik, melynek egyik végpontja F , másik pedig a t érintő valamely (G -től különböző) pontja. És mivel a G pontok összessége a d -nek F -ből a felére kicsinyített c képe – a parabola ún. csúcserintője –, azért tetszőleges K külső pontból a parabolához húzható érintőknek a c -n levő pontjait az FK átmérőjű Thalész-körrel metszhetjük ki.

Eszerint K -t az m közös érintőn bárhol véve, a k Thalész-kör mindig átmegy FD_{12} -nek G_{12} felezőpontján, ami egyszersmind a c_1, c_2 csúcserintők közös pontja. Ezeknek k -val való második közös pontját L_1, L_2 -vel jelölve a K -ból húzott második érintők közti szög a kerületi szögek tétele és Thalész tétele alapján

$$L_1KL_2 \sphericalangle = L_1G_{12}L_2 \sphericalangle = 90^\circ,$$

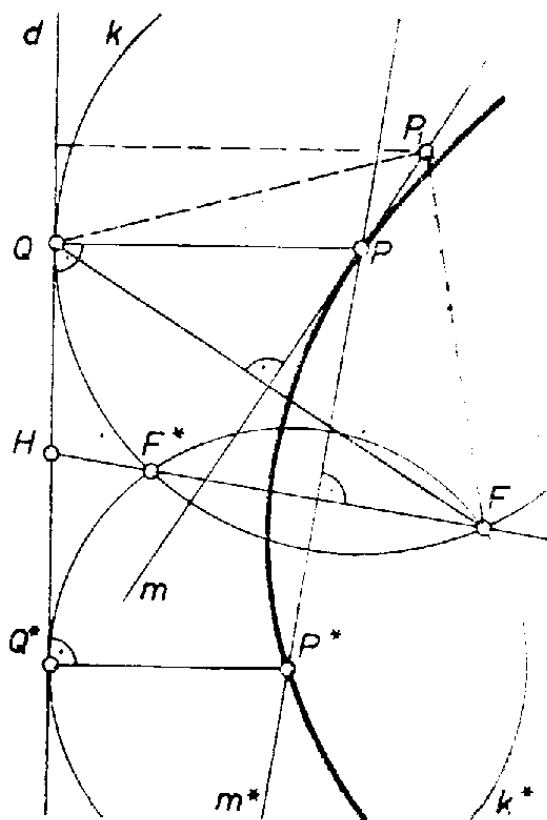
hiszen a csúcsérintők szöge egyenlő a vezéregyenesek, valamint a parabolatengelyek közti szöggel. Az állítást bebizonyítottuk.

*

A parabola felhasznált tulajdonsága megtalálható a gimnáziumok III. osztályaiban az 1967–68. tanév végéig használatban volt tankönyvben¹. Ott a parabolát az $y = x^2$ egyenlet képeként értelmezték, az érintőt pedig így: az érintő a szelő határhelyzete, amikor a szelőnek és a görbének két metszéspontja egybeesik, és ezekből elemezték ki, hogy a parabola egyszersmind azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyek egy adott ponttól ugyanakkora távolságra vannak, mint egy adott egyenestől.

A gimnázium III. osztályának jelenlegi tankönyve viszont a parabolát a most mondott mértani helyként értelmezi, az érintőt pedig (burkoltan) ugyancsak a fenti módon, de csak iránytangensének megállapítására ad eljárást (differenciálható függvényeket ábrázoló görbék eseteire); ezért az alábbiakban inkább elemi úton és koordináták mellőzésével bizonyítjuk a parabola felhasznált tulajdonságát.

Az FQ szakasz m felező merőlegesének és a d -re Q -ban emelt merőlegesnek P metszéspontja parabolapont, hiszen $PF = PQ$, és PQ a P -nek d -től mért távolsága. Eszerint a P középpontú, F -en átmenő k kör érinti d -t, éppen Q -ban. A parabolának m -en P az egyetlen pontja, mert m -nek egy P -től különböző P_1 pontjára $P_1F = P_1Q$, az utóbbi viszont nagyobb P_1 -nek d -től mért távolságánál, hiszen P_1Q nem merőleges d -re (2. ábra).



2. ábra

Ha viszont m -et P körül elfordítjuk az m^* helyzetbe, m^* -on van még egy P^* parabolapont, vagyis olyan, hogy a P^* középpű, F -en átmenő k^* kör érinti d -t egy Q^* pontban. Azt állítjuk, hogy Q^* a Q tükröképe arra a H pontra nézve, amelyet az F -ből m^* -ra bocsátott merőleges metsz ki d -ből. Merte FH k -t F^* -ban. Ekkor a H -ből k -hoz húzott érintő és szelő alapján $HQ^2 = HF \cdot F^*H$. a tükrözés miatt $HQ^{*2} = HQ^2$, tehát $HQ^{*2} = HF \cdot F^*H$, vagyis az F , F^* , Q^* pontokon átmenő kört d érinti Q^* -ban. E kör középpontja FF^* felező merőlegesén van, ami a szerkesztés szerint m^* , másrészt a Q^* -ban d -re emelt merőlegesén, tehát P -től különböző pont (hiszen H , és így Q^* is különböző Q -tól), ez a mondott P^* .

Ezek szerint m^* -ot m felé forgatva, amikor egybeesik m -mel, akkor H és Q^* egybeesik Q -val, P^* pedig P -vel, tehát m valóban a parabola érintője.

Eredményünkéből az is következik, hogy a P -beli érintő egyszersmind az FPQ szögfelezője, tehát az állítás felhasznált megfordítása is helyes volt.

¹ Gallai T.-Hódi E.-Péter R.-Szabó P.-Tolnai J.: Matematika a gimn. III. o. számára, 9. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1959. 203–209. o.