

**I. megoldás.** A függvény minden  $x$  értékre értelmezve van, mert  $a > 0$  folytán a négyzetgyökjel alatt nem állhat negatív érték. Emiatt

$$\sqrt{\sin^2 2x + a \cos^2 x} \geq \sqrt{\sin^2 2x} = |\sin 2x|,$$

így a függvény értéke sehol sem negatív, a 0 értéket viszont felveszi, ahol  $\cos x = 0$ , azaz

$$x = x_m = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \text{ egész}).$$

A függvény minimuma tehát 0.

Jelöljük a függvényértéket röviden  $y$ -nal. Az ezt megadó összefüggésből olyan egyenletet alakítunk, amelyben csak egyetlen szögfüggvény szerepel.  $y - \sin 2x$  négyzetét felírva és rendezve

$$y^2 - 2y \sin 2x = a \cos^2 x.$$

Innen  $2y \sin 2x = 4y \sin x \cos x$  négyzetét heghatározva egy csak  $\cos x$ -et tartalmazó összefüggést kapunk:

$$16y^2(1 - \cos^2 x) \cos^2 x = y^4 - 2ay^2 \cos^2 x + a^2 \cos^4 x,$$

vagy  $\cos x$  hatványai szerint rendezve

$$(a^2 + 16y^2) \cos^4 x - 2y^2(a + 8) \cos^2 x + y^4 = 0.$$

Ez  $\cos^2 x$ -re másodfokú egyenlet.  $y$  csak olyan értékeket vehet fel, amikre ennek van megoldása, tehát a diszkrimináns. ill. annak negyedrésze nem negatív:

$$y^4(a + 8)^2 - y^4(a^2 + 16y^2) = 16y^4(a + 4 - y^2) \geq 0.$$

Ez fennáll, ha  $y = 0$  vagy ha a második tényező nem negatív, így

$$y \leq \sqrt{a + 4}.$$

A  $\sqrt{a + 4}$  értéket arra az  $x$  értékre veheti fel  $y$ , amelyre (a fenti egyenletből)

$$\cos^2 x = \frac{a + 4}{a + 8}.$$

Ez pozitív, 1-nél kisebb érték, mivel  $a > 0$ , így van olyan  $x$ , amire

$$\cos x = \sqrt{\frac{a + 4}{a + 8}}, \text{ ill. amire } \cos x = -\sqrt{\frac{a + 4}{a + 8}}.$$

Behelyettesítés azt adja, hogy az először említett helyeken a függvény valóban a  $\sqrt{a + 4}$  értéket veszi fel (az utóbbiakon nem). Így a függvény maximális értéke  $\sqrt{a + 4}$ .

**II. megoldás.** A maximumnak a derivált 0-helyeiből való meghatározása céljára  $x$  helyett bevezetjük a  $t/2$  változót, tehát az  $f(x) = f(2t) = g(t)$  függvény maximumát keressük. Így

$$f(x) = g(t) = \sin t + \sqrt{\sin^2 t + \frac{a}{2}(1 + \cos t)},$$

$$(1) \quad g'(t) = \cos t + \frac{\sin t \cos t - \frac{a}{4} \sin t}{\sqrt{\sin^2 t + \frac{a}{2}(1 + \cos t)}}.$$

A nevező a maximum helyén nem lehet 0, más szóval a  $t = \pi + 2k\pi$  helyet kizárjuk,  $g(t)$ -t  $2\pi$  szerint periodikus volta alapján csak a  $0 \leq t < \pi$  és  $\pi < t < 2\pi$  intervallumokban vizsgáljuk.

A  $g'(t) = 0$  követelményből rendezéssel, négyzetreemeléssel és ismert azonosságok alkalmazásával

$$\begin{aligned} \cos^2 t \left\{ \sin^2 t + \frac{a}{2}(1 + \cos t) \right\} &= \left( \frac{a}{4} - \cos t \right)^2 \sin^2 t, \\ \frac{a}{2} \cos t(1 + \cos t) - \frac{a^2}{16}(1 - \cos^2 t) &= 0, \\ \frac{a}{16}(1 + \cos t) \{ (a + 8) \cos t - a \} &= 0, \end{aligned}$$

vagyis maximum csak ott lehet, ahol

$$(a+8)\cos t - a = 0,$$

$$(2) \qquad \cos t = \frac{a}{a+8}.$$

Ez  $a > 0$  miatt a  $(0, \pi/2)$  és  $(3\pi/2, 2\pi)$  intervallumokban ad egy-egy értéket. Minthogy azonban a négyzetre emeléssel nem ekvivalens átalakítást végeztünk, ezeket ellenőriznünk kell. (2) helyettesítésével (1) első tagja és a második tag nevezője pozitív, a számláló pedig

$$-\frac{a(a+4)}{4(a+8)}\sin t,$$

a  $(3\pi/2, 2\pi)$  intervallumban pozitív, ott tehát  $g'(t) = 0$ -nak nincs gyöke. A  $(0, \pi/2)$  intervallumbeli  $t_M$  értékre, vagyis ahol

$$\cos t_M = \frac{a}{a+8}, \qquad \sin t_M = \frac{4\sqrt{a+4}}{a+8},$$

teljesül  $g'(t_M) = 0$ , ugyanis a nevező értéke  $\frac{\sqrt{(a+4)^3}}{a+8}$ .

Minthogy pedig a  $t_M$ -et közrefogó 0 és  $\pi/2$  helyeken  $g'(0) = 1 > 0$  és  $g'(\pi/2) < 0$ , azért itt létezik maximum, és értéke

$$\frac{4\sqrt{a+4}}{a+8} + \frac{(a+4)\sqrt{a+4}}{a+8} = \sqrt{a+4}.$$

*Papp Zoltán* (Debrecen, Fazekas M. Gimn.)