

Az $f(x)$ -et előállító kifejezésnek azokra az x -ekre van értelme, amelyekre $\sqrt{a^2 - x^2}$ -nek van értelme, továbbá a nevező nem 0. Az első feltételt azok az x értékek elégítik ki, amelyekre

$$(2) \quad -|a| \leq x \leq |a|.$$

A nevező sohasem 0, ha a negatív, mert ekkor

$$a - \sqrt{a^2 - x^2} \leq a (< 0),$$

tehát a kifejezésnek van értelme az egész (2) számközben. Ha a pozitív, akkor ki kell hagynunk (2)-ből az $x = 0$ középpontot.

Függvényünk így értelmezve van az $x = 0$ hely környezetében, beszélhetünk az illető helyen a határértékéről. Ennek megállapítási érdekében alakítsuk át a függvényt:

$$f(x) = \frac{x^2}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} = a + \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Ha x értéke közel van 0-hoz, $(a^2 - x^2)$ értéke a^2 -hez, $\sqrt{a^2 - x^2}$ értéke $\sqrt{a^2} = |a|$ -hez lesz közel, így azt várjuk, hogy

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a + |a| = b.$$

Ezt akkor bizonyítjuk be, ha megmutatjuk, hogy tetszőleges pozitív ε -hoz van olyan δ , hogy a

$$(4) \quad 0 < |x| < \delta$$

egyenlőtlenségből következik, hogy

$$(5) \quad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Induljunk ki (5)-ből:

$$f(x) - b = (a + \sqrt{a^2 - x^2}) - (a + |a|) = \sqrt{a^2 - x^2} - |a|.$$

Ezzel a különbséggel végezzük el az előbb használt átalakítás fordítottját:

$$f(x) - b = (\sqrt{a^2 - x^2} - |a|) \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2} + |a|}{\sqrt{a^2 - x^2} + |a|} = \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2} + |a|},$$

amiatt

$$|f(x) - b| = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2} + |a|}.$$

Ennek kell ε -nál kisebbnek lennie, ami biztosan teljesül, ha

$$\frac{x^2}{|a|} < \varepsilon, \quad \text{azaz} \quad |x| < \sqrt{\varepsilon \cdot a}.$$

(4)-ből tehát valóban következik (5), ha δ -nak $\sqrt{\varepsilon \cdot a}$ és a kisebbikét, ill. ha egyenlők, közös értéküket választjuk.

Eredményünk így is kimondható

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } a < 0, \\ 2a, & \text{ha } a > 0. \end{cases}$$

Megjegyzés. Esetünkben meghatározható lett volna δ legnagyobb megfelelő értéke, erre azonban nincs szükség. A fenti δ értékek lényegesen kevesebb fáradsággal adódtak.