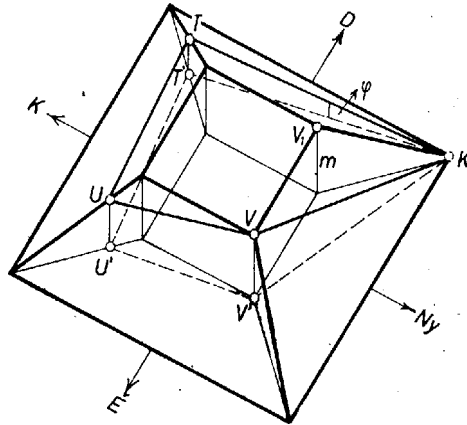


Legyen a két út közös kezdő- és végpontja K és V , a II. út töréspontjai a hegy délkelet és északkelet felé mutató élén T és U , ezeknek, valamint a hegyet teljes gúlává kiegészítő gúla C csúcsának az alapon levő vetülete rendre V' , T' , U' , C' , a hegy magassága $V'V = m$, végül a II. út emelkedési szöge φ (1. ábra).



1. ábra

A magasságot az utak méreteivel kétféleképpen kifejezve

$$(1) \quad m = V'V = KV' \operatorname{tg}(\varphi + 16,7^\circ) = (KT' + T'U' + U'V') \operatorname{tg} \varphi$$

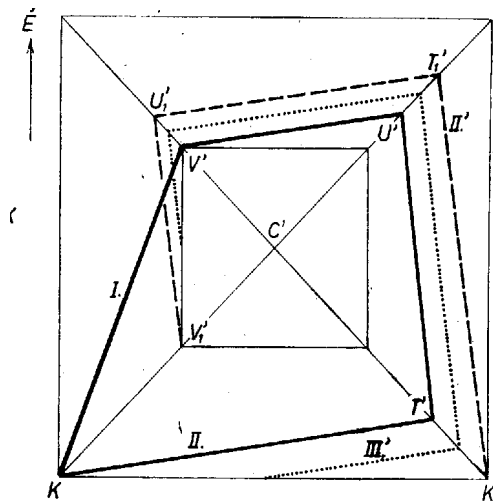
és itt nyilvánvalóan

$$KV'^2 = \left(\frac{320 - 135}{2} \right)^2 + \left(\frac{320 + 135}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}(320^2 + 135^2).$$

Alább belátjuk, hogy a KT' , $T'U'$, $U'V'$ vetületszakaszok szomszédos páronként merőlegesek egymásra. Eszerint a $C'KT'$, $C'T'U'$, $C'U'V'$ derékszögű háromszögek hasonlóak (2. ábra):

$$\frac{C'T'}{C'K} = \frac{C'U'}{C'T'} = \frac{C'V'}{C'U'} = q, \quad \frac{C'V'}{C'K} = q^3, \\ q = \sqrt[3]{\frac{C'V'}{C'K}} = \sqrt[3]{\frac{135}{320}} = \frac{3}{4},$$

hiszen két négyzetben az átlók aránya egyenlő az oldalak arányával.



2. ábra

Így (méterben)

$$C'K = 160\sqrt{2}, \quad C'T' = 120\sqrt{2}, \quad C'U' = 90\sqrt{2}, \quad C'V' = 67,5\sqrt{2},$$

ezekből

$$KT' = 200\sqrt{2}, \quad T'U' = 150\sqrt{2}, \quad U'V' = 112,5\sqrt{2},$$

és az (1) jobb oldalán álló zárójel értéke: $A = 462,5\sqrt{2}$.

Legyen még $\operatorname{tg} 16,7^\circ = t (= 0,3000)$, így (1)-ből

$$KV' \cdot \frac{t + \operatorname{tg} \varphi}{1 - t \operatorname{tg} \varphi} = A \operatorname{tg} \varphi,$$

$$At \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi - (A - KV') \operatorname{tg} \varphi + KV' \cdot t = 0,$$

amiből $\operatorname{tg} \varphi$ -re két pozitív érték adódik. Tovább pedig – ismét (1) alapján

$$m_{1,2} = A \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2t} \left\{ A - KV' \pm \sqrt{(A - KV')^2 - 4A \cdot KV' \cdot t^2} \right\},$$

tehát a hegy magassága lehet $m_1 = 130,5$, és $m_2 = 1231$ méter, a megfelelő szögek a II. és I. útra

$$11,3^\circ \text{ és } 28,0^\circ, \quad \text{ill.} \quad 62,0^\circ \text{ és } 78,7^\circ.$$

Az utóbbi kettő rendkívüli meredekség, valószínűbb a magasság 130,5 méteres értéke. (A hegyoldalak lejtése még így is $54,7^\circ$.)

Visszatérve a felhasznált állításra, nyilvánvaló, hogy a déli lejtő a C -n átmenő függőleges egyenes körül 90° -kal elfordítva a keleti lejtő helyére jut. Legyen a KT szakasz új helyzete K_1T_1 . Ennek emelkedési szöge ugyancsak φ , és ekkora szöget zár be a vízszintessel a keleti lejtőnek minden vele párhuzamos egyenese, ami pedig nem párhuzamos vele (és észak felé emelkedik), annak emelkedési szöge φ -nél nagyobb vagy kisebb. Így $T'U'$ párhuzamos K_1T_1 vetületével, ez viszont merőleges KT' -re.

A III. útvonal kérdése könnyebb lesz, ha két segédútvonalat tekintünk: felvezetjük az előbbi K_1T_1 folytatását, $K_1T_1U_1V_1 = II'$ -t, ami nyilvánvalóan a tetőfennsík délnyugati csúcsára érkezik, másik segédútvonalunk pedig a déli oldal közepéből indul a keleti oldal felé, ugyanakkora emelkedéssel, mint III, vagyis mint II és II'. így az előzők szerint III' első szakasza a KK_1T háromszög KT -vel párhuzamos középvonala, tehát K_1T felezőpontjában lesz az első törése, tovább a K_1T_1UT , majd a T_1U_1VU trapéz középvonalán halad, tehát harmadik töréspontja felezi U_1V -t, végül az U_1V_1V háromszögnek az U_1V_1 oldallal párhuzamos középvonalán haladva a VV_1 nyugati oldal felezőpontjába érkezik fel.

Így a kívánt III. útvonal felső végpontja – ismét 90° -os elfordítással – a fennsík déli oldalának felezőpontja.

Gegesy Ferenc (Budapest, Móricz Zs. Gimn., IV. o. t.)

Simon Júlia (Győr, Kazinczy F. Gimn., III. o. t.)