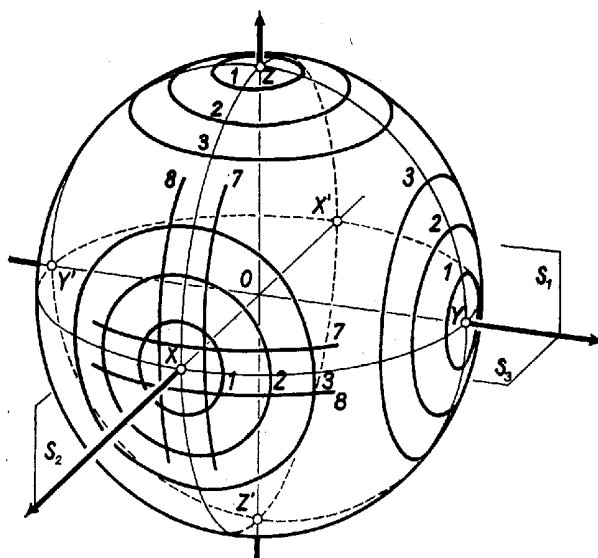


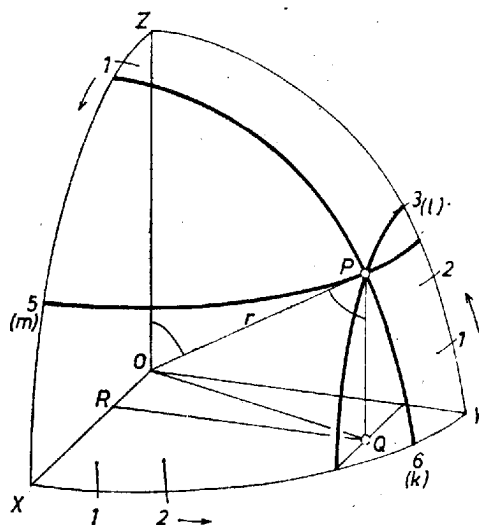
I. megoldás. Az XX' átmérőn átmenő fél-főkörre az $\alpha = 180^\circ/15 = 12^\circ$ -os szög többszöröseit kell felmérnünk. A kapott osztópontok szimmetrikusak az XX' átmérőre merőleges, O -n átmenő S_1 síkra, így a belőlük származtatott körök is szimmetrikusak S_1 -re (1. ábra).



1. ábra

Hasonlóan szimmetrikusak az YY' , ZZ' tengelyekhez tartozó körök a tengelyekre merőleges S_2 , ill. S_3 síkra. Ez a három sík a teret és a gömböt 8 részre vágja fel, a fenti szimmetria miatt elegendő e részek egyikét megvizsgálni, az itt talált metszéspontoknak az összes többiben megtaláljuk a határoló síkokra való tükrözés útján.

Tegyük fel, hogy a megrajzolt körök közül három megy át a gömb választott nyolcadának valamely P pontján. Tartozzék ez a három kör rendre az α szög k -, l -, m -szereséhez, ahol feltevésünk szerint k , l , m 1 és 7 közötti egész számok.



2. ábra

Legyen P vetülete az S_3 síkon Q , az OPQ derékszögű háromszögben $OPQ \sphericalangle = POZ \sphericalangle = m\alpha$, emiatt (2. ábra)

$$PQ = r \cos m\alpha,$$

ahol r a G gömb sugara. Hasonlóan

$$QR = r \cos l\alpha, \quad OR = r \cos k\alpha,$$

ahol R a Q pontnak az XX' egyenesen levő vetülete. Az OQR , OQP derékszögű háromszögekben

$$OP^2 = OQ^2 + QP^2 = OR^2 + RQ^2 + QP^2,$$

tehát

$$(1) \quad \cos^2 k\alpha + \cos^2 l\alpha + \cos^2 m\alpha = 1.$$

Ezek szerint meg kell keresnünk az (1) egyenlet gyökeit. Ennek érdekében meghatározzuk az α szög többszöröseinek a cosinusát, illetve a

$$\cos^2 \beta = (\cos 2\beta + 1)/2$$

összefüggés alapján a 2-szeresük cosinusából közvetlenül e cosinusok négyzetét, a táblázat alapján:

β	12°	24°	36°	48°	60°	72°	84°
$\cos^2 \beta$	0,9568	0,8346	0,6545	0,4477	0,2500	0,0955	0,0109

Ha az (1)-ben szereplő három szög közül a legkisebb 12° -os volna, akkor a másik két cosinus négyzetösszegének

$$1 - 0,9568 = 0,0432$$

-nek kellene lennie, e szögek tehát csak 84° -osak lehetnének, mert cosinus-négyzetük külön-külön legfeljebb 0,0432; így látnivalóan nem kapunk gyököt.

Ha a legkisebb szög 24° -os, a másik két szögre jutó maradék 0,1654, csak 72° -os és 84° -os szögek jöhetnek szóba, ismét nincs megoldás.

Ha a legkisebb szög 36° -os, a maradék 0,3455, így 60° -os, 72° -os, 84° -os szögek szerepelhetnek még: az első kettő cosinusa négyzetének összege épp 0,3455.

Ha a legkisebb szög 48° -os, a maradék 0,5523, így 48° -os, 60° -os, 72° -os, 84° -os lehet a másik kettő: egy 48° -os és egy 72° -os majdnem megfelel, az összeg 0,5432, tehát a hozzájuk tartozó három kör csak megközelíti egymást. Végül ha a legkisebb szög 60° -os, akkor a cosinus-négyzetek összege legfeljebb $3 \cdot 0,25 = 0,75$, (1)-nek nincs ilyen megoldása.

A kapott 36° -os, 60° -os, 72° -os szöghármas valóban gyöke (1)-nek (és nem csak a táblázatunk pontosságáig elégitik ki azt), hiszen

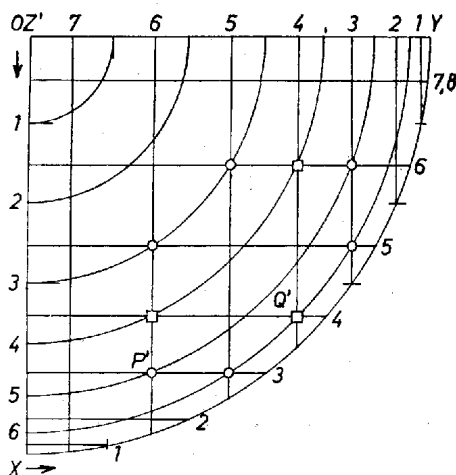
$$\begin{aligned} \cos^2 60^\circ &= \frac{1}{4}, \\ \cos^2 36^\circ &= \frac{\cos 72^\circ + 1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5} + 3}{8}, \\ \cos^2 72^\circ &= \frac{\cos 144^\circ + 1}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{8}, \end{aligned}$$

és ezek összege valóban 1. E szöghármasnak a választott nyolcadban 6 pont felel meg, hiszen a 3, 5, 6 szorzószámokat 6-féle sorrendben feleltethetjük meg a k, l, m változóknak. Ennek a 6 pontnak az összes többi nyolcadban van megfelelője, összesen tehát 48 pont van, melyen a megrajzoltak közül 3 kör megy át.

A második kérdésre térve, nem találtunk metszést az olyan körökön, amelyek a 12° -nak 1-, 2-, 4-, ill. 7-szereséhez tartoznak, így az ilyen körök száma a szimmetriák figyelembevételével $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$.

Somorjai Gábor (Budapest, I. István Gimn., III. o. t.)
Donga György (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Könnyű megrajzolni a köreinkből az XYZ gömbháromszögbe eső íveknek pl. az $XOY = S_3$ síkon levő vetületét, hiszen az első két körrendszert kimetsző síkok erre merőlegesek, és így a megfelelő negyedkörívek vetületei az OX , ill. OY sugárra merőleges fél-húrok; a 3. körrendszert kimetsző síkok pedig párhuzamosak S_3 -mal, ezért mindegyik ilyen kör vetülete vele egybevágó, O középpontú kör (3. ábra).



3. ábra

Ha van a gömb felületén hármas metszéspont, annak vetületén 3 kör vetülete megy át, és pedig mindhárom körrendszer 1-1 körének vetülete.

A rajz szerint 6 ponton látszik átmenni 3-3 kör vetülete. Bebizonyítjuk, hogy ezek a gömbfelület olyan pontjainak vetületei, amelyeken valóban 3 kör megy át. Ezt egyetlen számítás bizonyítja, mert a pontok mindegyike az egyik körrendszer 3. körének, egy másik körrendszer 5. és a harmadik rendszer 6. körének vetületén látszik. Így pl. a XX' -re merőleges 3. és az YY' -re merőleges 6. kör vetületei közös P' pontjának OY -tól, ill. OX -től mért távolsága

$$\cos 3 \cdot 12^\circ = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \text{ ill. } \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \text{ és - mint az ezek négyzetösszegéből vont négyzetgyök -}$$

$$OP' = \sqrt{\frac{(6 + 2\sqrt{5}) + (6 - 2\sqrt{5})}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 5 \cdot 12^\circ.$$

Ez pedig a ZZ' -re merőleges körrendszer 5. körének sugara, ami állításunkat igazolja.

Az ilyen pontok száma valóban 6, ahányféle sorrendben a körök 3., 5. és 6. sorszáma az OX , OY , OZ tengelyű körrendszerhez hozzárendelhetjük:

$$(3, 5, 6), (3, 6, 5), (5, 3, 6), (5, 6, 3), (6, 3, 5), (6, 5, 3).$$

További 3 esetben 3 vetület csak közel halad egymáshoz: két körrendszer 4. és a harmadik rendszer 6. körének vetülete. Valóban $\cos 4 \cdot 12^\circ = \cos(30^\circ + 18^\circ)$, ehhez

$$\cos 18^\circ = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{4}}, \quad \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \quad \text{így}$$

$$\cos 48^\circ = \frac{1}{8} \left(\sqrt{30 + 6\sqrt{5}} - \sqrt{5} + 1 \right),$$

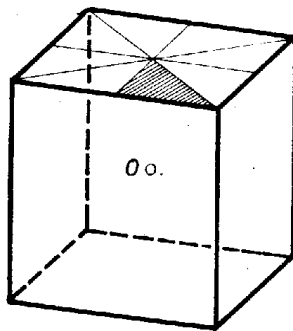
de a fentiekhez hasonlóan az első két körből adódó négyzetösszeg négyzetgyöke

$$\sqrt{2 \cos^2 48^\circ} = \sqrt{2} \cos 48^\circ \neq \sin 6 \cdot 12^\circ = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

(A két oldal eltérése 3 tizedesre kerekítve 0,005).

Ezek szerint a gömbfelület $8 \cdot 6 = 48$ pontján megy át 3-3 kör; másrészt fordítva mindegyik körrendszer előlről és hátulról számított 3., 5. és 6. körén van, a további 8 körén nincs 3-as metszéspont, tehát a megrajzolt, de 3-as metszéspontot nem tartalmazó körök száma 24.

Megjegyzés. Tulajdonképpen elég lett volna vizsgálni az XYZ gömb-háromszög $1/6$ részét, miután mindegyik csúcsában megrajzoltuk a szögfelező főkört – amit pl. a Z csúcsban az XOZ és YOZ síkok közti szög felezősíkja metsz ki –, és így a gömbháromszöget 6 egybevágó gömbháromszögre osztottuk. Valóban, véve egy olyan, O középpontú K kockát, melynek élei párhuzamosak XX' -vel, YY' -vel, ZZ' -vel, minden olyan szimmetriaművelet, amely K -t önmagába viszi át, ugyanezt teszi 42 körünk együttesével. Márpedig a 4. ábrabeli kockán megjelölt háromszögből – ami a felület $1/48$ része – szimmetriákkal az egész kockafelület megkapható.



4. ábra