

Az x , $2x$, $3x$, $4x$ számok egyike sem lehet egyenlő $\pi/2$ -nek valamely páratlan többszörösével, különben (1) bal oldala nincs értelmezve. Felismerjük másrészt, hogy minden egész k esetén $x = k\pi$ kielégíti az egyenletet, ezt a további gyökök keresésében kizárjuk. Minden x_0 gyökkel együtt $x_0 + k\pi$, valamint $-x_0$ és $-x_0 + k\pi$ is gyök, elég tehát a nyitott $(0, \pi/2)$ intervallumra szorítkoznunk.

(1) szélső, valamint közbülső tagjait egy-egy párba kapcsolva

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 4x &= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 4x}{\cos 4x} = \frac{\sin(x+4x)}{\cos x \cos 4x}, \\ \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x &= \frac{\sin 5x}{\cos 2x \cos 3x},\end{aligned}$$

ezeket (1)-be beírva, majd a $2 \cos u \cos v = \cos(u+v) + \cos(u-v)$ azonosságot alkalmazva

$$\begin{aligned}\sin 5x \left(\frac{1}{\cos x \cos 4x} + \frac{1}{\cos 2x \cos 3x} \right) &= \\ = \frac{\sin 5x(2 \cos 5x + \cos 3x + \cos x)}{2 \cos x \cos 4x \cos 2x \cos 3x} &= 0,\end{aligned}$$

ami akkor teljesül, ha

$$\begin{aligned}\sin 5x &= 0, \text{ és ha} \\ (2) \quad 2 \cos 5x + \cos 3x + \cos x &= 0.\end{aligned}$$

Az első egyenlet megoldása a kijelölt intervallumban

$$5x = k\pi, \quad x = k\frac{\pi}{5}, \quad k = 1, 2.$$

Jelöljük (2) bal oldalát y -nal. Ezt a $2 \sin u \cos v = \sin(u+v) - \sin(v-u)$ és más ismert azonosságok alapján így alakítjuk:

$$\begin{aligned}y &= \frac{2y \sin x}{2 \sin x} = \frac{1}{2 \sin x} \{2(\sin 6x - \sin 4x) + (\sin 4x - \sin 2x) + \sin 2x\} = \\ &= \frac{2 \sin 6x - \sin 4x}{2 \sin x} = \frac{2 \sin(4x+2x) - \sin 4x}{2 \sin x} = \\ &= \frac{2 \cos 4x \sin 2x - \sin 4x(1 - 2 \cos 2x)}{2 \sin x} = \\ &= \frac{\sin 2x}{\sin x} \{\cos 4x - \cos 2x(1 - 2 \cos 2x)\} = \\ &= 2 \cos x(4 \cos^2 2x - \cos 2x - 1).\end{aligned}$$

Eszerint a fentiek figyelembevételével további gyököket csak a

$$4 \cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$$

egyenlet ad. Innen fok egységekben a $(0, \pi)$ intervallumban

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \frac{1 + \sqrt{17}}{8} = 0,6404 & \text{és} & \quad \cos 2x = \frac{1 - \sqrt{17}}{8} = -0,3904, \\ 2x &= 50^\circ 11', & & \quad 2x = 112^\circ 59' .\end{aligned}$$

Végül a talált gyököket összegyűjtve, (1)-et a 0° , 180° intervallumban a következő értékek elégítik ki:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0^\circ; \quad x_2 = 36^\circ, \quad x_3 = 72^\circ, \quad x_4 = 108^\circ, \quad x_5 = 144^\circ; \\ x_6 &= 25^\circ 5', \quad x_7 = 154^\circ 55', \quad x_8 = 56^\circ 29', \quad x_9 = 123^\circ 31' .\end{aligned}$$

Kurucz Erzsébet (Polgár, József A. Gimn., III. o. t.)