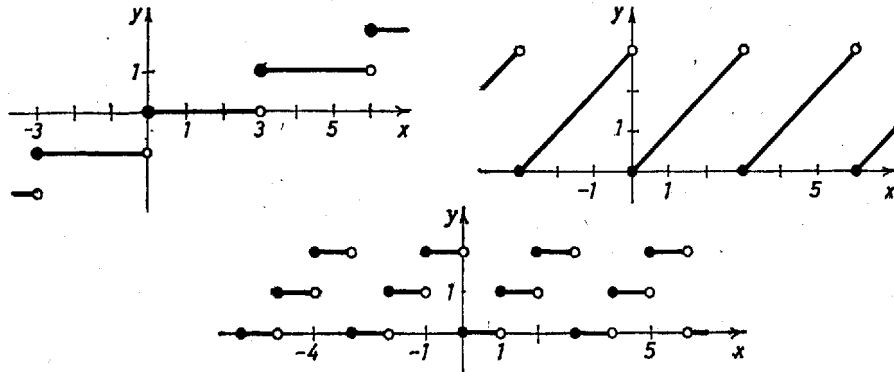


I. megoldás. Ábrázoljuk először (1) első tagját. Az $\frac{x}{3}$ függvény képe az x függvény képéből x tengely menti 3-szoros nyújtással áll elő, hiszen amely értéket az utóbbi az a helyen felvesz, azt az előbbi a $3a$ helyen veszi fel. Ugyanilyen nyújtással áll elő $\left[\frac{x}{3}\right]$ képe $[x]$ ismert képéből: lépcsőinek hossza 3-szor akkora, mint a magasságuk; más szóval: a függvény a 3-mal osztható egész helyeken ugrik 1-et fölfelé (1₁ ábra).

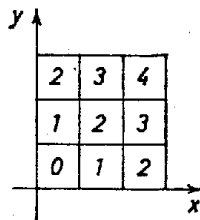


1. ábra

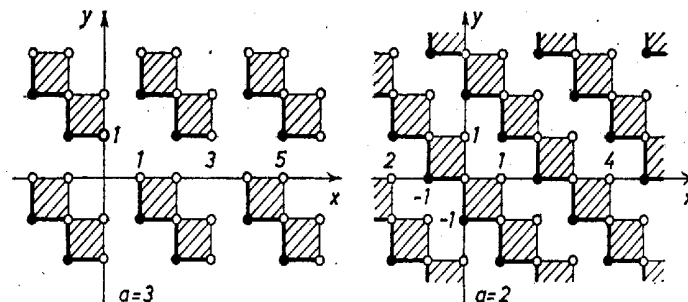
A 3-mal való szorzás a függvény képében 3-szoros nyújtást jelent az y tengely irányában, így $3\left[\frac{x}{3}\right]$ képe az $[x]$ képéből mindkét irányú, vagyis origó centrumú 3-szoros nagyítással áll elő. Ennélfogva ugyanez a transzformáció állítja elő az $x - 3\left[\frac{x}{3}\right]$ függvény képét az $x - [x]$ függvény (az ún. törtrész-függvény, fűrész-függvény) ismert képéből, hiszen az x függvényt a középpontos nagyítás önmagába viszi át (1₂ ábra). Ez a függvény periodikus, periódusa 3.

Végül ebből $\left[x - 3\left[\frac{x}{3}\right]\right]$ ugyancsak 3 periódusú függvény (1₃ ábra); mondhatjuk: az $[x] : 3$ osztás maradékát adja meg (az egész számok osztásánál szokásos értelemben), így x növekedésével egész számra rálépve két egymás utáni esetben 1-et -1 -et nő, a következő ilyen esetben, 3-mal osztható egész értékre rálépve, 2-t csökken.

Ugyanezek állnak (1) második tagjára, így a bal oldal x és y szerint egyaránt periodikus, periódusa 3, továbbá értéke az egész abszcisszájú és ordinátájú rácsegyenesekkel egységnégyzetekre felosztott sík minden kis négyzetében állandó, éspedig annyi, mint bal alsó csúcsában. A $(0; 0)$, $(3; 0)$, $(3; 3)$ és $(0; 3)$ csúcsokkal meghatározott négyzet 9 egységnégyzetében felvett értékeket a 2. ábra tünteti fel, ezek alapján a követelménynek megfelelő pontok halmazát az előírt a értékekre a 3₁, 3₂ ábrák vázolják vonalkázással. A jelölt egységnégyzetekhez alsó és bal oldaluk hozzáértendő, ezeknek jobb, ill. felső végpontja nélkül.



2. ábra



3. ábra

II. megoldás. Az egész-rész-függvényt meghatározó (2) egyenlőtlenségrendszerben x helyére $x/3$ -at írva és 3-mal szorozva

$$3\left[\frac{x}{3}\right] \leq x < 3\left[\frac{x}{3}\right] + 3, \quad \text{azaz} \quad 0 \leq x - 3\left[\frac{x}{3}\right] < 3,$$

s így (1) bal oldalának mindegyik tagja csak a 0, 1, 2 értékeket veheti fel. $a = 3$ mellett tehát csak úgy teljesülhet az egyenlet, ha a bal oldal egyik tagja 1, a másik 2; $a = 2$ esetében pedig úgy, hogy vagy mind a két tag 1, vagy az egyik 0, a másik 2.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen z értékekre teljesül

$$\left[z - 3 \left[\frac{z}{3} \right] \right] = b,$$

ahol $b = 0, 1$ vagy 2 . Ez, ismét (2) szerint azt jelenti, hogy

$$b \leq z - 3 \left[\frac{z}{3} \right] < b + 1,$$

tehát a z szám $3k + r$ alakú, ahol k egész és $b \leq b + 1$.

Ezek szerint (1) $a = 3$ mellett azokra a pontokra teljesül, amelyeknek koordinátái $x = 3m + u$, $y = 3n + v$ alakúak, ahol m, n egész és

$$1 \leq u < 2 \quad \text{és} \quad 2 \leq v < 3, \quad \text{vagy} \quad 2 \leq u < 3 \quad \text{és} \quad 1 \leq v < 2;$$

$a = 2$ esetén pedig az ugyanilyen alakú koordinátákkal jellemzett pontokra, ahol azonban most

$$0 \leq u < 1 \quad \text{és} \quad 2 \leq v < 3 \quad \text{vagy} \quad 1 \leq u, v < 2 \quad \text{vagy} \quad 2 \leq u < 3 \quad \text{és} \quad 0 \leq v < 1.$$

Ezeket a pontokat a $3_1, 3_2$ ábrák bevonalkázott négyzetei ábrázolják, nem számítva hozzájuk felső és jobb oldali határukat.