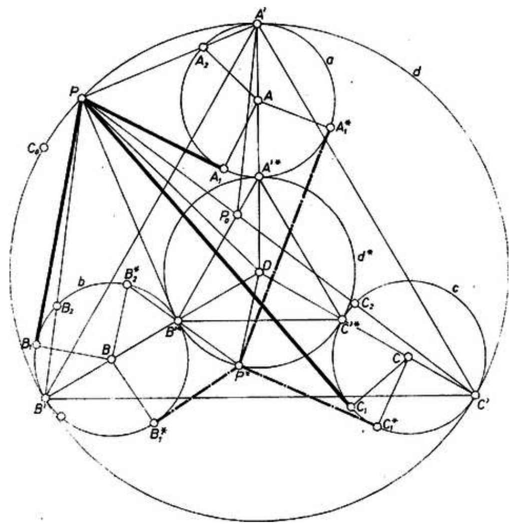
I. A d kör R sugarát az a, b, c körök r sugarával csökkentve az A, B, C-n átmenő kört, vagyis az ABC háromszög körülírt körét kapjuk, tehát d középpontja, D, a háromszög körülírt körének középpontja. Legyenek d-nek az a, b, c körrel való érintkezési pontja rendre A', B', C'.



Ezekre az állítás semmitmondóan érvényes. A szimmetria miatt a d-n választandó P pont kijelölésében elég az $A'C_0$ ívre szorítkoznunk, ahol C_0 a C'-ből induló átmérő végpontja. Legyen a P-ből húzott (egyik) érintő érintési pontja az a, b, c körön rendre A_1, B_1, C_1 és messe a PA' egyenes a-t másodszor A_2-ben. PB' a b-t B_2-ben, PC' a c-t C_2-ben. Így a P-ből húzott érintő és szelő tétele szerint $PA_1^2 = PA' \cdot PA_2$, és emiatt

$$\left(\frac{PA_1}{PA'}\right)^2 = \frac{PA_2}{PA'} = \frac{DA}{DA'} = \frac{R-r}{R} = \text{állandó},$$

ugyanis $A_2A||PD$, hiszen az $A'AA_2$ egyenlő szárú háromszög az $A'DP$-nek kicsinyítettje A'-ből mint középpontból. Ezért és hasonlóan

$$PA_1 = k \cdot PA', \qquad PB_1 = k \cdot PB', \qquad PC_1 = k \cdot PC',$$

ahol k a mondott (pozitív) állandó négyzetgyökét jelöli, és ezekről kell belátnunk, hogy kettőjük összege egyenlő a harmadikkal.

Ez abból adódik, hogy $A'B'C'$ nyilvánvalóan szintén egyenlő oldalú háromszög, P a köréje írt körnek a rövidebbik $A'B'$ ívén levő pontja és az $A'B'P$ háromszögnek az $A'C'P_0$ helyzetbe való elfordításával

$$A'P + B'P = A'P_0 + C'P_0 = PP_0 + P_0C' = PC'.$$

Valóban, az elfordítás szöge 60° volt, ezért APP_0 egyenlő oldalú háromszög, és P_0 a PC' szakaszra jutott, mert egyrészt $A'C'P_0\sphericalangle = A'B'P\sphericalangle = A'C'P\sphericalangle$, másrészt $C'P_0 = B'P < C'P$, ugyanis az utóbbi két szakasz a két-két oldal hosszában megegyező $PA'B'$, $PA'C'$ háromszögekben a harmadik oldal, és P helyzetének megválasztása folytán a $B'P$-vel szemben levő $PA'B'$ szög 60°-kal kisebb, mint a $C'P$-vel szemben fekvő $C'A'P$ szög.

A bizonyítandó egyenlőség most már $A'P + B'P = C'P$-ből adódik k-val való szorzás útján.

II. Amíg az a, b, c körök sugarára teljesül $r < AD$, addig d^* az a, b, c körök mindegyikét kívülről érinti. Az A'^*, B'^*, C'^* érintési pontok ismét egyenlő oldalú háromszöget alkotnak, és fenti bizonyításunk csak annyiban változik, hogy az ábra jelöléseivel

$$\left(\frac{P^*B_1^*}{P^*B'^*}\right)^2 = \frac{P^*B_2^*}{P^*B'^*} = \frac{R^*+r}{R^*} = \text{állandó}.$$

Az ábrán P^* a d^* körnek az A'^*-ot nem tartalmazó $B'^*C'^*$ ívén van, ebben a helyzetben

$$P^*A'^* = P^*B'^* + P^*C'^*, \text{ és így}$$
$$P^*A_1^* = P^*B_1^* + P^*C_1^*.$$

Ha viszont $r > AD$, akkor d^*-ot a, b, c mindegyike magába zárja, a kívánt érintők nem húzhatók meg. Eszerint $r < AD$ esetén 2 körre érvényes az állítás, $r \geqq AD$ esetén pedig csak 1-re, az I. részben vizsgált érintkezési típusúra.

Lukács Péter (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)