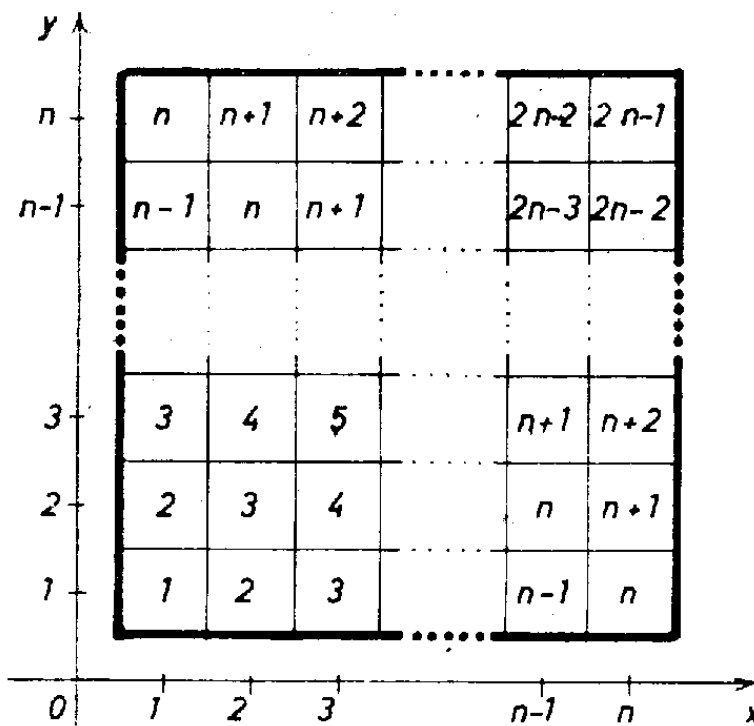


Síkbeli pontrendszer súlypontja (tömegközéppontja) – mint a fizikából ismeretes – az a pont, amelybe a rendszer össztömegével egyenlő (szokásos jelöléssel $\sum m$) tömeget gondolva, ennek bármely (forgási) tengelyre számított nyomatéka egyenlő a rendszer egyes tömegei nyomatékának összegével. A nyomatékot a tömeg és a tengelytől mért (előjellel együtt értett) távolság (kar) szorzata adja. A tömegközéppont helyzetét két különböző irányú tengelytől mért távolságával határozhatjuk meg (a tengelyeket természetesen a síkban véve). A koordinátatengelyeket úgy célszerű választani, hogy minden mező középpontjának a távolsága a legközelebbi pont távolságának többszöröse legyen.

I. Helyezzük a sakktáblát a szokásos derékszögű koordinátarendszerbe és válasszuk ennek hosszúságegységét úgy, hogy az 1. sor és 1. oszlop közös mezeje középpontjának koordinátái $(1, 1)$ legyenek, a 2. sor és 2. oszlop közös mezeje középpontjáé pedig $(2, 2)$. Ekkor – a sakokban szokásosan alulról fölfelé számozott – i -edik sor és balról jobbra j -edik oszlop közös mezeje középpontjának koordinátái nyilvánvalóan (j, i) , az ide tett anyagi pont tömege az első tömegpontrendszer esetében $j + i - 1$. Így minden egyes anyagi pontnak az x, y tengelyre vonatkoztatott karját megadja az ordinátája, ill. abszcisszája, másrészt a pontrendszer nyilvánvaló szimmetriája miatt a T tömegközéppont két koordinátája egyenlő, elég x_T abszcisszáját meghatároznunk.



1. ábra

A tömegek összege céljára tekintsük az egyes oszlopokbeli tömegek összegét. Mértékszámuk minden oszlopban fölfelé növekvő, 1 differenciájú számtani sorozatot alkotnak. Az első oszlopban

$$s_1 = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n}{2}(1 + n).$$

A 2. oszlop tagjai rendre az 1-gyel nagyobb számok, hiszen a (j, i) középpontú mező száma $j + (i - 1)$ alakban írható, tehát $s_2 = s_1 + n$, ugyanígy $s_3 = s_2 + n = s_1 + 2n, \dots$, az oszlopösszegek szintén számtani sorozatot alkotnak. Az utolsó oszlop összege

$$s_n = n + (n + 1) + \dots + (2n - 1) = \frac{n}{2}(3n - 1)$$

vagy kellő alakítással:

$$s_n = \frac{n}{2} \{ (1 + n) + 2(n - 1) \} = s_1 + (n - 1)n,$$

így tehát, mint az n összeg összege

$$\sum m = \frac{n}{2} \left\{ \frac{n}{2}(1 + n) + \frac{n}{2}(3n - 1) \right\} = \frac{n^2}{4} \cdot 4n = n^3.$$

A pontrendszernek az y tengelyre vett nyomatékában minden egyes oszlop tömegeinek karja (abszcisszája) közös és egyenlő az oszlop sorszámaival, így a fentiek alapján

$$\sum m_k x_k = s_1 \cdot 1 + s_2 \cdot 2 + s_3 \cdot 3 + \dots + s_n \cdot n =$$

$$\begin{aligned}
&= (s_1 + 0 \cdot n) \cdot 1 + (s_1 + 1 \cdot n) \cdot 2 + (s_1 + 2 \cdot n) \cdot 3 + \dots + \{s_1 + (n-1)n\} \cdot n = \\
&= s_1(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n\{(0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n)\}.
\end{aligned}$$

(Ebben – a fizikában szokásos – jelölésben a k sorszám valamilyen sorrendben végigfut a sakktábla mezőin.)

A második zárójelbeli kifejezés így alakítható

$$\begin{aligned}
&(1^2 - 1) + (2^2 - 2) + (3^2 - 3) + \dots + (n^2 - n) = \\
&= (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) - (1 + 2 + \dots + n) = \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{6}(2n-2) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3},
\end{aligned}$$

így

$$\sum m_k x_k = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n^2(n+1)(n-1)}{3} = \frac{n^2(n+1)}{12}(7n-1).$$

Ezzel az x_T -re vonatkozó egyenlet és megoldása

$$x_T \cdot \sum m = \sum m_k x_k, \quad x_T = y_T = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m} = \frac{(n+1)(7n-1)}{12n}.$$

(A tömegközéppont semmilyen $n(>1)$ esetén sem esik a tábla egy mezejének középpontjába, mert x_T nem lehet egész, hiszen n az $n+1$ -hez is, $7n-1$ -hez is relatív prím.)

II. A második pontrendszer esetében hasonlóan járunk el. Az első oszlopban álló tömegek összege változatlanul s_1 , a 2. oszlopbelieké $2s_1$, hiszen tagról tagra az 1. oszlopbeli szám 2-szeresét írtuk be, hasonlóan a 3., ..., n -edik oszlop tömeg-összege $3s_1, \dots, ns_1$, tehát

$$\begin{aligned}
\sum m &= s_1 + 2s_1 + 3s_1 + \dots + ns_1 = \\
&= s_1(1 + 2 + \dots + n) = s_1^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

n	$2n$	$3n$	...	$(n-1)n$	n^2
$n-1$	$2(n-1)$	$3(n-1)$	...	$(n-1)^2$	$(n-1)n$
...	...	...	...	...	...
3	6	9	...	$3(n-1)$	$3n$
2	4	6	...	$2(n-1)$	$2n$
1	2	3	...	$n-1$	n

2. ábra

Oszloponként ismét közös az y -tengelytől mért távolság, így

$$\begin{aligned}
\sum m_k x_k &= s_1 \cdot 1 + (2s_1) \cdot 2 + (3s_1) \cdot 3 + \dots + (ns_1) \cdot n = \\
&= s_1(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{12},
\end{aligned}$$

és ezek alapján az U tömegközéppont koordinátái:

$$x_U = y_U = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m} = \frac{2n+1}{3}.$$

Megjegyzések. **1.** Első látásra kézenfekvőbb a sakktábla bal alsó sarkát választani a koordinátarendszer origójává. Úgy bonyolultabb számítás eredményeként nyilvánvalóan $1/2$ -del kisebbnek kaptuk volna a koordinátákat:

$$x'_T = y'_T = x_T - \frac{1}{2} = \frac{7n^2 - 1}{12n}, \quad x'_U = y'_U = \frac{4n - 1}{6}.$$

Papp Zoltán

2. A $\sum m$ összeg egyszerűen képezhető az átlók bármelyikével párhuzamosan való csoportosítással is.