

Az 1968-as szám helyére a gyökjelek alatt C -t, a kitevőben $2n$ -et írva és a gyökök különbségét D -vel jelölve általánosan azt mutatjuk meg n szerinti teljes indukcióval, hogy ha C is, n is nemnegatív egész szám, akkor van olyan A , B egész számpár, amelyre

$$(1) \quad (\sqrt{C+1} - \sqrt{C})^{2n+1} = D^{2n+1} = A\sqrt{C+1} - B\sqrt{C}, \quad \text{és}$$

$$(2) \quad (C+1)A^2 - C \cdot B^2 = 1.$$

$n = 0$ esetében $A = B = 1$, és ezekre teljesül (2). Tegyük fel, hogy egy a feltevés szerinti a kitevőhöz van olyan A_n , B_n egész szám, hogy

$$D^{2n+1} = A_n\sqrt{C+1} - B_n\sqrt{C} \quad \text{és} \quad (C+1)A_n^2 - C \cdot B_n^2 = 1.$$

Ekkor a hatványt az 1-gyel nagyobb n -hez képezve, kellő rendezéssel

$$\begin{aligned} D^{2(n+1)+1} &= D^{2n+1} \cdot D^2 = \\ &= (A_n\sqrt{C+1} - B_n\sqrt{C})(\sqrt{C+1} - \sqrt{C})^2 = \\ &= (A_n\sqrt{C+1} - B_n\sqrt{C})(2C+1 - 2\sqrt{C(C+1)}) = \\ &= [(2C+1)A_n + 2CB_n] \cdot \sqrt{C+1} - [(2C+1)B_n + 2(C+1)A_n] \cdot \sqrt{C}. \end{aligned}$$

Itt a szögletes zárójelekben egész számok állnak, megfelelnek az állítás első részében A_{n+1} , ill. B_{n+1} szerepére; másrészt ezekkel kellő rendezés után és a feltevés második részét alkalmazva

$$\begin{aligned} (C+1)A_{n+1}^2 - C \cdot B_{n+1}^2 &= \\ &= (C+1)[(2C+1)A_n + 2CB_n]^2 - C[(2C+1)B_n + 2(C+1)A_n]^2 = \\ &= [(2C+1)^2 - 4C(C+1)] \cdot [(C+1)A_n^2 - CB_n^2] = 1, \end{aligned}$$

tehát az állítás második része is teljesül. – Ezzel a bizonyítást befejeztük.