

Bármely természetes szám osztóinak összegét könnyen felírhatjuk az 1205. gyakorlat¹ megoldásában látott csoportosítás mintájára, a szám prímfelbontása alapján. Pl. a p^α és $p^\alpha g^\beta r^\gamma$ (ahol p, q, r különböző prímek) osztóinak összege (magát a számot is és 1-et is beleértve):

$$1 + p + p^2 + p^3 + \dots + p^\alpha, \quad \text{ill.} \\ (1 + p + p^2 + \dots + p^\alpha)(1 + q + q^2 + \dots + q^\beta)(1 + r + r^2 + \dots + r^\gamma).$$

Hasonlóan az osztók négyzetének összege

$$(1) \quad 1 + p^2 + p^4 + \dots + p^{2\alpha}, \quad \text{ill.} \\ (2) \quad (1 + p^2 + p^4 + \dots + p^{2\alpha})(1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2\beta})(1 + r^2 + r^4 + \dots + r^{2\gamma}).$$

Eszerint a megadott összegértékekhez vagy egyetlen p, α számpárt kell meghatároznunk, melyre (1) az adott számmal egyenlő, vagy több ilyen, melyben $p, q, \dots$ különbözők, és a megfelelő, (1) alakú kifejezések szorzata egyenlő az adott számmal.

Az $a), b), c)$ összegek egyikéhez sem tartozik p^α alakú (egyetlen törzsszám hatványa) eredeti szám, ugyanis (1) első tagját elhagyva a maradék osztható p^2 -nel, esetünkben viszont az 1 csökkentéssel adódó számok egyike sem osztható törzsszám négyzetével, mert prímfelbontásuk:

$$849 = 3 \cdot 283, \quad 1299 = 3 \cdot 433, \quad 7734 = 2 \cdot 3 \cdot 1289.$$

Így összegeinket legalább két (1) alakú összeg szorzatára kell felbontanunk.

Az összegek prímfelbontása rendre:

$$850 = 2 \cdot 5^2 \cdot 17, \quad 1300 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 13, \quad 7735 = 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17,$$

így (1) alakú tényezőként szóba jövő valódi osztóik az 1106. gyakorlat² eljárásához hasonlóan rendre

$$\begin{aligned} &5, 10, 17, 25, 34, 50, 85, 170; \\ &5, 10, 13, 20, 25, 26, 50, 52, 65, 100, 130, 260; \\ &5, 7, 13, 17, 35, 65, 85, 91, 119, 221, 455, 595, 1105, 1547 \end{aligned}$$

(nem írtuk fel az 5-nél kisebb valódi osztókat, mert a legkisebb (1) alakú szám $1 + 2^2 = 5$; és fordítva, emiatt az előírt összeg értékek 5-ödrészénél nagyobb osztókat is elhagyhattuk).

Célszerű lesz fordítva eljárni, a kisebb p és α értékekhez kiszámítani (1)-et, majd a belőlük képezhető szorzatok között keresni az adott összeg-értékeket. Ilyeneket tartalmaz táblázatunk, megjegyezve, hogy mivel egyik összegünk sem többszöröse 3-nak, a 3-mal osztható (1) alakú számok helyére vonalat írtunk, másrészt hogy az értékek rohamosan növekszenek.

$p =$	2	3	5	7	11	13 ...
$\alpha = 1$	5	10	26	50	122	170
$\alpha = 2$	—	91	—	—	—	
$\alpha = 3$	85	820				
$\alpha = 4$	11 · 31					

Mármost könnyű látni, hogy mindegyik összeg-értékünk előállítható a táblázat két különböző oszlopából vett, (1) alakú szám szorzataként, sőt az első kétféleképpen is:

$$850 = 85 \cdot 10 = 5 \cdot 170, \quad 1300 = 26 \cdot 50, \quad 7735 = 85 \cdot 91,$$

továbbá, mivel az 1300 előállításában használt 50-es tényező a táblázat más két oszlopából vett szám szorzataként is megkapható: $5 \cdot 10$, azért a táblázat három különböző oszlopából vett szám szorzataként:

$$1300 = 5 \cdot 10 \cdot 26.$$

Ezek szerint 850-es osztó-négyzetösszeget a $2^3 \cdot 3 = 24$ és $2 \cdot 13 = 26$ számok adnak, 1300-at az $5 \cdot 7 = 35$ és a $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ számok, végül 7735-öt a $2^3 \cdot 3^2 = 72$ szám.

¹ K. M. L. 37 (1968) 218. o.

² K. M. L. 35 (1967) 151. o.