

Az

$$(1) \quad a + b + c = k,$$

$$(2) \quad 0 < a < b < c,$$

illetőleg

$$(3) \quad 0 < a \leq b \leq c$$

feltételeket teljesítő egész számok egy háromszög oldalai, ha legnagyobbikuk kisebb, mint a másik kettő összege:

$$(4) \quad c < a + b \quad (\text{azaz } c - b < a),$$

ugyanis a háromszög-egyenlőtlenségek további alakjai (2), ill. (3) miatt teljesülnek.

I. A (2) feltétel esetében (4) alapján

$$a \geq c - b + 1 \geq 2,$$

hiszen

$$(2a) \quad c - b \geq 1.$$

Mármost $a = 2$ csak $c - b = 1$ esetén lehetséges, amikor $c + b$ és vele a kerület $(c + b) + 2$ mértékszáma is páratlan. Ekkor, $k = 2m + 1$ jelöléssel a $c - b = 1$, $c + b = k - a = 2m - 1$ rendszerből egyértelműen

$$(5) \quad a = 2, \quad b = m - 1, \quad c = m,$$

és ez megfelel, hacsak $b > a$, $m - 1 > 2$, $m > 3$, azaz $k \geq 9$ esetén. Eszerint

$$a_{\min} = 2, \text{ ha } k = 9, 11, 13, \dots$$

Páros k esetén viszont a és $(c + b)$, tehát a és $(c - b)$ is egyező párosságú, így (2a) miatt

$$a \geq (c - b) + 2 \geq 3,$$

és mihelyt $k = 2m \geq 12$, az előbbihez hasonlóan adódó

$$(6) \quad a = 3, \quad b = m - 2, \quad c = m - 1,$$

oldalhármasként meg is felel, tehát

$$a_{\min} = 3, \text{ ha } k = 12, 14, 16, \dots$$

Az (5), (6) oldalhármasként egyszersmind c legnagyobb értékét is megkaptuk, hiszen (4) miatt $c < k/2$, és a $k/2$ -nél kisebb egész számok közül valóban $k = 2m + 1$ esetén m a legnagyobb, $k = 2m$ esetén pedig $m - 1$.

Az x számban foglalt legnagyobb egész szám $[x]$ jelének felhasználásával $c_{\max}$ kapott kétféle kifejezése közös alakban adható meg:

$$\frac{k}{2} - \frac{1}{2}, \quad \text{ill.} \quad \frac{k}{2} - 1, \quad \text{mindenképpen } c_{\max} = \left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil.$$

Megkaptuk továbbá (5)-ben és (6)-ban a $b_{\max}$ értéket is, mert bennük a -ra a lehető legkisebb részt használtuk fel k -ból, így a lehető legnagyobb rész maradt $(b + c)$ -re és ezen belül b a legkisebb hiánnyal marad alatta c -nek:

$$b_{\max} = c_{\max} - 1 = \left\lceil \frac{k-3}{2} \right\rceil.$$

$a_{\min}$ -nak hasonló, egységes kifejezése

$$a_{\min} = 3 - \left(k - 2 \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \right),$$

hiszen itt a $()$ értéke páros k esetén 0, páratlan k esetén 1.

Hasonlóan ugyanazon oldalhármasként lép fel $a_{\max}$ és $c_{\min}$. Ugyanis a -ra úgy jut legnagyobb rész k -ból, ha b és c a megengedhető legkisebb többlettel múlják felül a -t; másrészt c akkora legkisebb, ha b és a csak a legkisebb hiánnyal maradnak alatta. (2) miatt

$$b \geq a + 1, \quad c \geq b + 1 \geq a + 2, \text{ illetve}$$

$$b \geq c - 1, \quad a \leq b - 1 \leq c - 2, \text{ így}$$

$$k \geq 3a + 3, \quad \text{illetőleg } k \leq 3c - 3,$$

$$(7) \quad a \leq \frac{k-3}{3}, \quad \text{illetőleg} \quad c \geq \frac{k+3}{3},$$

$$a_{\max} = \left\lceil \frac{k-3}{3} \right\rceil, \quad \text{és} \quad c_{\min} = \left\lceil \frac{k+3}{3} + \frac{2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{k+5}{3} \right\rceil,$$

ugyanis (7) jobb oldala $k = 3r, 3r + 1, 3r + 2$ esetén rendre $r + 1, r + 4/3, r + 5/3$, az ezeknél nem kisebb egészek legkisebbike rendre $r + 1, r + 2, r + 2$, legnagyobb növekedésként $2/3$ mutatkozik a $k = 3r + 1$ esetben, ennyivel növeltük a $\lceil \cdot \rceil$ -be írandó számot.

A $k : 3$ osztás 3-féle lehetséges maradéka szerint a megfelelő oldalhármas

$$k = 3r, \quad k = 3r + 1, \quad k = 3r + 2$$

esetén rendre a következő:

$$r - 1, \quad r, \quad r + 1; \quad r - 1, \quad r, \quad r + 2, \quad r - 1, \quad r + 1, \quad r + 2,$$

hacsak

$$\begin{array}{ccc} r > 2, & r > 3, & r > 2. \\ k = 9, 12, 15, \dots & k = 13, 16, \dots & k = 11, 14, \dots \end{array}$$

Végül $b_{\min}$ úgy adódik, ha egyrészt $a + b$ a legkisebb – vagyis c a legnagyobb –, másrészt az $(a + b)_{\min}$ értéken belül a a legnagyobb, a^* értékét veszi fel. Mint láttuk, k párossága szerint $c_{\max}$ 1-gyel vagy 2-vel marad alatta az $(a + b)_{\min}$ értéknek, ugyanígy a^* is 1-gyel vagy 2-vel kisebb, mint $b_{\min}$ az $(a + b)_{\min}$ érték párossága szerint, vagyis

$$(8) \quad \begin{aligned} c_{\max} &\geq (a + b)_{\min} - 2, & a^* &\geq b_{\min} - 2, & \text{így} \\ k = (a + b)_{\min} + c_{\max} &\geq 2(a + b)_{\min} - 2 = 2(a^* + b_{\min}) - 2 \geq 4b_{\min} - 6, \\ b_{\min} &\leq \frac{k + 6}{4}, & b_{\min} &= \left\lfloor \frac{k + 6}{4} \right\rfloor. \end{aligned}$$

A $k : 4$ osztás 4-féle maradéka szerint a megfelelő oldalhármas:

$$\begin{array}{llllll} k = 4s \text{ esetén:} & s, & s + 1, & 2s - 1, & \text{hacsak} & s > 2, & k \geq 12, \\ k = 4s + 1 \text{ esetén:} & s, & s + 1, & 2s, & \text{hacsak} & s > 1, & k \geq 9, \\ k = 4s + 2 \text{ esetén:} & s, & s + 2, & 2s, & \text{hacsak} & s > 2, & k \geq 14, \\ k = 4s + 3 \text{ esetén:} & s, & s + 2, & 2s + 1, & \text{hacsak} & s > 1, & k \geq 11. \end{array}$$

Összefoglalva, a (2) feltétel esetén

$$\left. \begin{aligned} 3 - \left(k - 2 \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \right) &\leq a \leq \left\lfloor \frac{k - 3}{3} \right\rfloor, \\ \left\lfloor \frac{k + 6}{4} \right\rfloor &\leq b \leq \left\lfloor \frac{k - 3}{2} \right\rfloor, \\ \left\lfloor \frac{k + 5}{3} \right\rfloor &\leq c \leq \left\lfloor \frac{k - 1}{2} \right\rfloor, \end{aligned} \right\} \text{ ha } k = 9, k \geq 11.$$

$k = 9, 11, 12$ és 14 esetén egyetlen megoldás van, ezekben az egyes oldalak legkisebb és legnagyobb értéke egyenlőnek adódik.

II. Lényegében ugyanígy kapjuk a keresett értékeket a (3) feltétel esetében is. (2a) helyére

$$(3a) \quad c - b \geq 0$$

lép, így (4)-ből $a \geq 1$. Az $a_{\min} = 1$ érték a $k = 2m + 1 (\geq 3)$ esetben adódik ismét a $b_{\max} = c_{\max} = m$ értékekkel egy háromszögben, $k = 2m (\geq 6)$ esetén pedig $a_{\min} = 2, b_{\max} = c_{\max} = m - 1$; közös kifejezéssel

$$a_{\min} = 2 - \left(k - 2 \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \right), \quad c_{\max} = b_{\max} = \left\lfloor \frac{k - 1}{2} \right\rfloor.$$

Továbbá (3) miatt

$$\begin{array}{ll} k \geq 3a, & k \leq 3c, \\ a_{\max} = \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor, & c_{\min} = \left\lfloor \frac{k + 2}{3} \right\rfloor, \end{array}$$

végül mivel (8) második egyenlőtlensége helyére $a^* \geq b_{\min} - 1$ lép, hiszen $b_{\min} - a^*$ értéke 0 vagy 1, azért a fentihez hasonlóan

$$k \geq 2a^* + 2b_{\min} - 2 \geq 4b_{\min} - 4,$$

$$b_{\min} \leq \frac{k+4}{4}, \quad b_{\min} = \left\lceil \frac{k+4}{4} \right\rceil.$$

A talált értékek valóságos fellépését bizonyító oldalhármassok:

$$\begin{array}{c} k \\ a \\ b \\ c \end{array} \left| \begin{array}{cc} 2m+1 & 2m \\ 1 & 2 \\ m & m-1 \\ m & m-1 \\ k \geq 3 & k \geq 6 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} 3r & 3r+1 & 3r+2 \\ r & r & r \\ r & r & r+1 \\ r & r+1 & r+1 \\ k \geq 3 & k \geq 7 & k \geq 5 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cccc} 4s & 4s+1 & 4s+2 & 4s+3 \\ s & s & s+1 & s+1 \\ s+1 & s+1 & s+1 & s+1 \\ 2s-1 & 2s & 2s & 2s+1 \\ k \geq 8 & k \geq 5 & k \geq 6 & k \geq 3 \end{array} \right|$$

Összefoglalva, a (3) feltétel esetén

$$\left. \begin{array}{l} 2 - \left(k - 2 \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \right) \leq a \leq \left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil \\ \left\lceil \frac{k+4}{4} \right\rceil \leq b \leq \left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil \\ \left\lceil \frac{k+2}{3} \right\rceil \leq c \leq \left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil \end{array} \right\} \text{ ha } k = 3, k \geq 5.$$

Kemény András (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.)

Romhányi Éva (Szeged, Radnóti M. Gimn., II. o. t.)