

Azonos átalakításokkal

$$y = \operatorname{tg} x \left(1 - \frac{1}{\cos 2x} \right) = \operatorname{tg} x \frac{(1 - 2 \sin^2 x) - 1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2 \sin^3 x}{\cos x (\sin^2 x - \cos^2 x)} = \frac{2}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^3 x},$$

és mivel az előírt intervallumban az eredeti alak szerint $y > 2 \operatorname{tg} x > 2$, az eredeti kérdés helyett kereshetjük a

$$\frac{2}{y} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^3 x = \operatorname{ctg} x (1 - \operatorname{ctg}^2 x) \quad (< 1)$$

függvény maximumát. Ez ugyanazon x mellett válik maximálissá, mint a

$$2 \left(\frac{2}{y} \right)^2 = 2 \operatorname{ctg}^2 x (1 - \operatorname{ctg}^2 x)^2 = 2u^2 (1 - u^2) (1 - u^2)$$

függvény, ahol $u = \operatorname{ctg} x < 1$.

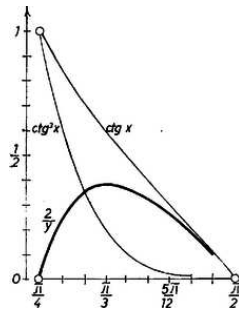
Így a jobb oldal tényezői pozitívak, és összegük 2, állandó, tehát a függvény a pozitív számok számtani és mértani közepe közötti ismert egyenlőtlenség szerint akkor veszi fel legnagyobb értékét, ha tényezői egyenlők:

$$2u^2 = 1 - u^2, \quad u = \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ekkor pedig

$$\left(\frac{2}{y} \right)_{\max} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad y_{\min} = 3\sqrt{3}.$$

Ezt az értéket a függvény az $x = 60^\circ$ helyen veszi fel.



Megjegyzések. 1. Az $f(u) = \frac{2}{y} = u - u^3$ függvény szélső értékét deriválással is meghatározhatjuk.

$$f'(u) = 1 - 3u^2,$$

tehát $f'(u) = 0$ az $u = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ helyeken áll be. Feladatunk feltételei szerint $0 < u < 1$, emiatt csak az $u_0 = 1/\sqrt{3}$ helyet kell megvizsgálnunk. Itt $f'(u)$ csökkenve válik 0-vá, ugyanis az ő deriváltjának – az eredeti $f(u)$ ún. *második deriváltjának* –

$$(f'(u))' = f''(u) = -6u$$

-nak az értéke a kérdéses u_0 helyen $-2\sqrt{3} < 0$, tehát az u_0 hely előtt $f'(u) > 0$, utána $f'(u) < 0$, így pedig az $f(u)$ függvénynek maximuma, $y = 2/f(u)$ -nak minimuma van.

2. Négyzetre emelés nélkül is célhoz érhetünk, ha $2/y$ -t elsőfokú tényezőkre bontjuk, majd megszorozzuk ezeket pozitív állandókkal, amelyeket úgy választunk, hogy az így keletkező tényezők összege u -tól független legyen és legyen egy u érték, amelyre mind a 3 tényező egyenlő. Az első feltétel teljesül $1, \alpha, 1 + \alpha$ alakú tényezők választása mellett:

$$\begin{aligned} \frac{2\alpha(1+\alpha)}{y} &= u \cdot [\alpha(1+u)] \cdot [(1+\alpha)(1-u)] \leq \\ &\leq \left(\frac{u + \alpha(1+u) + (1+\alpha)(1-u)}{3} \right)^3 = \frac{(1+2\alpha)^3}{27}. \end{aligned}$$

Emellett megoldhatónak kell lennie az

$$u = \alpha(1 + u),$$

$$u = (1 + \alpha)(1 - u)$$

egyenletrendszernek. Innen u -t kiküszöbölve a $2\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$ egyenlet gyöke $\alpha = (\sqrt{3} - 1)/2$, amivel $u = 1/\sqrt{3}$, mint a fenti megoldásban.