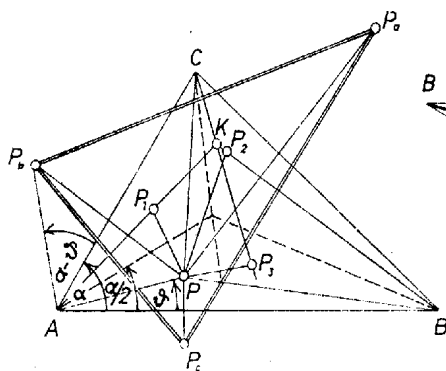


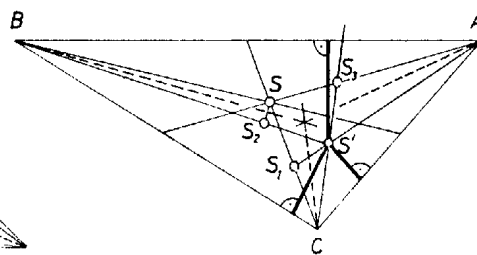
I. megoldás. a) Jelöljük P tükörképét a háromszög A -nál, B -nél, C -nél levő szögének felezőjére sorra P_1 -gyel, P_2 -vel, P_3 -mal. A kívánt AP_1 , BP_2 , CP_3 tükörképeket két-két, az A , B , ill. C pont körüli elfordítással állítjuk elő. Pozitívnak azt a forgási irányt vesszük, amely az AB félegyenest 180° -nál kisebb elfordulással viszi át AC -be.

Legyen $BAC \sphericalangle = \alpha$ és $BAP \sphericalangle = \vartheta$ (1. ábra). Ekkor AP -t a BAC szög felezőjébe $\alpha/2 - \vartheta$ nagyságú elfordulás viszi át, az előírt AP_1 helyzetbe pedig 2-szer ekkora elfordulás: $\alpha - 2\vartheta$. AP -nek első lépésül -2ϑ -val való elfordítása az AB -n való tükrözését jelenti az AP_c helyzetbe, ahol P_c a P tükörképe AB -re, második lépésül ezt α -val fordítjuk el. – Ugyanezt a véghelyzetet kapjuk, ha AB -t AC -vel felcserélve, AP -t AC -re tükrözzük az AP_b helyzetbe, ami $2(\alpha - \vartheta)$ -val történő elfordítás, majd a képet $-\alpha$ -val fordítjuk el. Ezek szerint az AP_1 félegyenes felezi a P_cAP_b szöget¹, pontosabban az AP_c -ből AP_b -be vivő elfordulást. És mivel $AP_c = AP = AP_b$, ezt is mondhatjuk: AP_1 a P_cP_b szakasz felező merőlegese.

Ugyanígy, P tükörképét BC -re P_a -val jelölve BP_2 a P_aP_c szakasz felező merőlegese, CP_3 pedig a P_aP_b szakaszé, vagyis a vizsgálandó AP_1 , BP_2 , CP_3 egyenesek a $P_aP_bP_c$ háromszög oldalfelező merőlegesei, tehát ennek a háromszögnek K középpontjában metszik egymást – hacsak a mondott háromszög nem fajult el egyenesszakasszá. Ezt kellett bizonyítanunk; tehát az állításbeli P' pont K .



1. ábra



2. ábra

b) P -ként az ABC háromszög M magasságpontját választva P' -ként – a fenti K helyén – az ABC háromszög köré írt k kör O középpontját kapjuk, hiszen ekkor – mint jól ismert – a P_a , P_b , P_c tükörképek k -n adódnak. Minthogy pedig egy tükörkép egyenesnek ugyanazon tengelyre vett tükörképe az eredeti egyenes, O -t véve P -ként, P' -ként M -et kapjuk, vagyis a háromszög ezen két nevezetes pontját a feladatban vizsgált eljárás egymásba viszi át.

P -ként az S súlypontot választva, megmutatjuk a tétel szerint kapott $P' = S'$ pont következő tulajdonságát: S' az a pontja a háromszög síkjának, amelynek az egymás utáni oldalaktól mért távolságai arányosak a megfelelő oldalak hosszával. Ehhez belátjuk, hogy az S pont $BAC \sphericalangle$ szögfelezőjére vett S_1 tükörképének az AB , AC oldalaktól mért d_c , d_b távolságaira fennáll $d_c : d_b = c : b$, és természetesen ugyanez az aránya az AS_1 egyenes minden S^* pontja távolságainak a mondott oldalaktól. Ebből már következik, hogy AS_1 -nek az analóg BS_2 -vel való S' metszéspontjára $d'_c : d'_b = c : b$ és $d'_a : d'_c = a : c$, tehát $d'_a : d'_b : d'_c = a : b : c$.

A súlypont ismert harmadoló tulajdonsága miatt S -nek az AB , AC oldaltól mért távolsága az m_c , ill. m_b magasság $1/3$ részével egyenlő (2. ábra), így S_1 re nézve $d_c = m_b/3$, $d_b = m_c/3$, és mivel még $m_b = 2t/b$, $m_c = 2t/c$, ahol t a háromszög területe, $d_c : d_b = 2t/3b : 2t/3c = c : b$

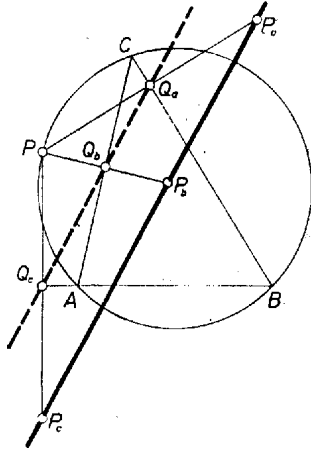
Bajmóczy Ervin (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Máté András (Budapest, I. István Gimn., I. o. t.)

Megjegyzés. Ha ismerjük a következő tételt, akkor megadhatjuk, mely P pontok esetén jön létre P' . Egy P pontnak az ABC (nem elfajult) háromszög oldalegyenesein levő Q_a , Q_b , Q_c vetületei akkor és csak akkor vannak egy egyenesen, ha P a háromszög köré írt k kör kerületén van (az egyenes a háromszöghöz és a P ponthoz tartozó Simson-féle – más néven Wallace-féle – egyenes)². Mármint P_a , P_b , P_c a Q_a , Q_b , Q_c ponthármas 2-szeresre nagyított képe P -ből mint középpontból, tehát a $P_aP_bP_c$ háromszög akkor és csak akkor fajul el egyenessé – és így P' nem jön létre –, ha P a k -n van (3. ábra).

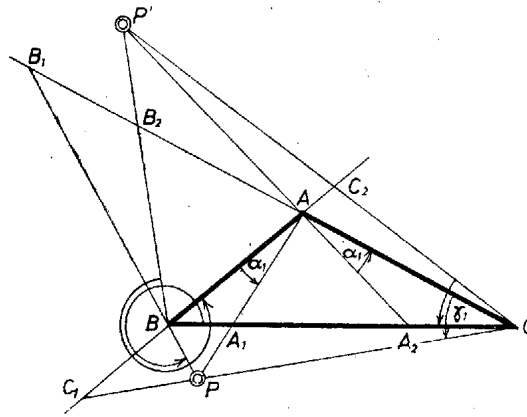
¹ Az 1. ábrán az AP_c egyenesdarab pótlendő.

² A feltétel elegendő volta bizonyítását speciális esetre lásd pl. Faragó László-Forgó Péterné: Geometriai szerkesztések, 2. kiadás (Középiskolai Szakköri Füzetek), Tankönyvkiadó, Budapest, 1954, 103. o.



3. ábra

II. megoldás. Messe a BC , CA , AB oldalt a PA , PB , PC egyenes rendre az A_1 , B_1 , C_1 pontban (4. ábra), a szóban forgó tükörképük pedig rendre az A_2 , B_2 , C_2 pontban.



4. ábra

Egyelőre feltesszük, hogy mindegyik metszéspont létrejött. Ekkor *Ceva tétele*³ szerint fennáll

$$(1) \quad \frac{AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1}{C_1B \cdot A_1C \cdot B_1A} = 1,$$

és azt kell bebizonyítanunk, hogy teljesül a következő is:

$$(2) \quad \frac{AC_2 \cdot BA_2 \cdot CB_2}{C_2B \cdot A_2C \cdot B_2A} = 1.$$

Legyen az ABC háromszög körüljárása pozitív (vagyis pl. AB -t AC -be, 180° -nál kisebb szöggel, pozitív forgás viszi át), és a BAP , CBP , ACP forgásszög mértékszáma rendre α_1 , β_1 , γ_1 , ekkor szerkesztésnél fogva ugyanennyi (esetleg 180° -kal több vagy kevesebb) a BAA_1 , CBB_1 , ACC_1 szög mértékszáma, úgyszintén az A_2AC , B_2BA , C_2CB szög mértékszáma is. Az AA_1B és AA_1C háromszögekből a sinustétel alapján

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA \sin \alpha_1}{\sin(\beta + \alpha_1)} : \frac{AC \sin(\alpha - \alpha_1)}{\sin(\beta + \alpha_1)} = \frac{BA \sin \alpha_1}{AC \sin(\alpha - \alpha_1)},$$

hasonlóan a BB_1C , BB_1A , valamint CC_1A , CC_1B háromszögpárokból

$$(3) \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CB \sin \beta_1}{BA \sin(\beta - \beta_1)}, \quad \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC \sin \gamma_1}{CB \sin(\gamma - \gamma_1)},$$

és ezekkel az (1) feltevés így alakul

$$(4) \quad \frac{\sin \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \gamma_1}{\sin(\alpha - \alpha_1) \sin(\beta - \beta_1) \sin(\gamma - \gamma_1)} = 1.$$

³Lásd az 1437. feladathoz fűzött megjegyzést, K. M. L. 33 (1966) 207. o., legutóbb felhasználva az 1119. gyakorlatban, K. M. L. 36 (1968) 158. o. (1) megfordítva is érvényes: ha (1) teljesül, akkor AA_1 , BB_1 , CC_1 egy ponton mennek át.

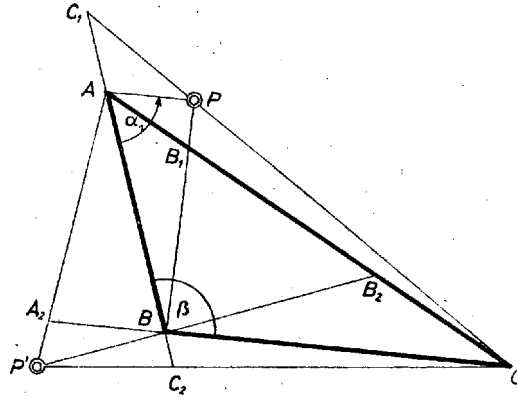
Másrészt az AA_2B , AA_2C , valamint BB_2C , BB_2A és CC_2A , CC_2B háromszögpárokból

$$\frac{BA_2}{A_2C} = \frac{BA \sin(\alpha - \alpha_1)}{AC \sin \alpha_1}, \quad \frac{CB_2}{B_2A} = \frac{CB \sin(\beta - \beta_1)}{BA \sin \beta_1},$$

$$\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{AC \sin(\gamma - \gamma_1)}{CB \sin \gamma_1},$$

ezek szorzata pedig (4) figyelembevételével (2)-t adja, amit bizonyítani akartunk.

Ha a PA , PB , PC egyenesek, ill. szóban forgó tükörképük közül egy vagy több párhuzamos a háromszög megfelelő oldalával, speciális esetek adódnak, ezekben a bizonyítás egyszerűbben alakul. Példaként csak a $PA \parallel BC$ esetet vesszük (PB , PC ne legyen párhuzamos oldallal, és A_2 , B_2 , C_2 is jöjjenek létre, 5. ábra).



5. ábra

Ekkor A , B , C , P egy trapéz csúcsai, és hasonló háromszögekből

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AP}{BC}, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{BC}{AP},$$

tehát szorzatuk 1. Másrészt, ha P az AB egyenesnek ugyanazon az oldalán van, mint C , akkor $\alpha_1 = 180^\circ - \beta$, így a (3) jobb oldalain álló kifejezések szorzatát megszorozva

$$\frac{BA \sin \beta}{AC \sin \gamma}$$

-val, aminek értéke 1, és így is írható:

$$\frac{BA \sin(180^\circ - \beta)}{AC \sin(\alpha + \beta - 180^\circ)} = \frac{BA \sin \alpha_1}{AC \sin(\alpha - \alpha_1)},$$

ismét megkapjuk (4)-et.