

I. megoldás. A vizsgálandó kifejezés minden előírt n esetében csak véges számú, 0-tól különböző tagot tartalmaz. Ugyanis a $k + 1$ -edik $\left[\right]$ jelben álló kifejezés

$$\frac{1}{2} + \frac{n}{2^{k+1}}$$

alakban írható, és ez pozitív valódi tört minden olyan k esetén, melyre

$$\frac{n}{2^{k+1}} < \frac{1}{2} \quad \text{azaz ha} \quad 2^k > n,$$

tehát egész része 0. (Ha a feltétel valamely egész k -ra teljesül, akkor minden további egész értékre teljesül, hiszen a 2^x függvény monoton nő.)

Jelöljük az összeget S_n -nel és tekintsük n néhány értékét.

$$\begin{aligned} S_1 &= \left[\frac{2}{2} \right] + \left[\frac{3}{4} \right] &&= 1 + 0 = 1, \\ S_2 &= \left[\frac{3}{2} \right] + \left[\frac{4}{4} \right] + \left[\frac{6}{8} \right] &&= 1 + 1 + 0 = 2, \\ S_3 &= \left[\frac{4}{2} \right] + \left[\frac{5}{4} \right] + \left[\frac{7}{8} \right] &&= 2 + 1 + 0 = 3, \\ S_4 &= \left[\frac{5}{2} \right] + \left[\frac{6}{4} \right] + \left[\frac{8}{8} \right] + \left[\frac{12}{16} \right] &&= 2 + 1 + 1 + 0 = 4, \\ &\dots\dots\dots \\ S_{10} &= \left[\frac{11}{2} \right] + \left[\frac{12}{4} \right] + \left[\frac{14}{8} \right] + \left[\frac{18}{16} \right] + \left[\frac{26}{32} \right] &&= 5 + 3 + 1 + 1 + 0 = 10, \\ S_{11} &= \left[\frac{12}{2} \right] + \left[\frac{13}{4} \right] + \left[\frac{15}{8} \right] + \left[\frac{19}{16} \right] + \left[\frac{27}{32} \right] &&= 6 + 3 + 1 + 1 + 0 = 11, \\ S_{12} &= \left[\frac{13}{2} \right] + \left[\frac{14}{4} \right] + \left[\frac{16}{8} \right] + \left[\frac{20}{16} \right] + \left[\frac{28}{32} \right] &&= 6 + 3 + 2 + 1 + 0 = 12. \end{aligned}$$

E példákban n -et 1-gyel -1 -gyel növelve S_n -nek mindig egyetlen tagja nőtt 1-gyel, a többi változatlan maradt. Megmutatjuk, hogy ez minden esetben így van, ezáltal teljes indukció útján bizonyítjuk az $S_n = n$ összefüggést. Valóban,

$$\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}} \right] = \left[\frac{n + 1 + 2^k}{2^{k+1}} \right],$$

ha $n + 2^k$ és $n + 1 + 2^k$ a 2^{k+1} -nek ugyanazon két többszöröse közé esik, az alsó határt megengedve, de a felsőt nem. Ha viszont $n + 1 + 2^k$ eléri 2^{k+1} következő többszörösét, tehát valamilyen m -re

$$n + 1 + 2^k = (m + 1)2^{k+1}, \quad \text{azaz} \quad n + 1 = (2m + 1)2^k,$$

akkor

$$\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}} \right] = \left[\frac{(m + 1)2^{k+1} - 1}{2^{k+1}} \right] = m \quad \text{és} \quad \left[\frac{n + 1 + 2^k}{2^{k+1}} \right] = \left[\frac{(m + 1)2^{k+1}}{2^{k+1}} \right] = m + 1.$$

Ilyen k minden egyes n -re csak egy van: ez az a kitevő, amire emelve 2-t, a hatvány még osztója $n + 1$ -nek, de a magasabb hatványok már nem. (Ha tehát $n + 1$ páratlan, akkor $k = 0$.)

Ezzel beláttuk, hogy

$$S_{n+1} - S_n = 1, \quad \text{így} \quad S_n = S_1 + n - 1 = n.$$

Megjegyzés. Mivel az $[(n + 2^k)/2^{k+1}]$ tag azoknál az n -eknél nő 1-gyel, amelyek 2^k -nak páratlan többszörösei és $n = 1 \cdot 2^k$ -nél 1 az értéke, így ez a tag az olyan, n -nél nem nagyobb számok számát adja, melyek oszthatók 2^k -nal, de 2 magasabb hatványával nem. Ezt nem nehéz közvetlenül igazolni, ami a fenti megoldásnak egy másik változatát adja.

II. megoldás. Bebizonyítjuk alább a következő azonosságot:

$$(2) \quad [2x] = [x] + \left[x + \frac{1}{2} \right].$$

Ezt ismételten alkalmazva, n így alakítható át:

$$\begin{aligned} n = [n] &= \left[2 \cdot \frac{n}{2} \right] = \left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right] = \\ &= \left[\frac{n+1}{2} \right] + \left[\frac{n}{4} \right] + \left[\frac{n}{4} + \frac{1}{2} \right] = \left[\frac{n+1}{2} \right] + \left[\frac{n+2}{4} \right] + \left[\frac{n}{8} \right] + \left[\frac{n}{8} + \frac{1}{2} \right]; \end{aligned}$$

és általában

$$(3) \quad n = \left[\frac{n+1}{2} \right] + \left[\frac{n+2}{4} \right] + \dots + \left[\frac{n+2^l}{2^{l+1}} \right] + \left[\frac{n}{2^{l+1}} \right].$$

Ezt $l = 0, 1, 2$ -re már láttuk és ha valamilyen l_0 értékre igaz, akkor (2)-t alkalmazva az utolsó tagra

$$\begin{aligned} n &= \left[\frac{n+1}{2} \right] + \left[\frac{n+2}{4} \right] + \dots + \left[\frac{n+2^{l_0}}{2^{l_0+1}} \right] + \left[\frac{n}{2^{l_0+1}} \right] = \\ &= \left[\frac{n+1}{2} \right] + \left[\frac{n+2}{4} \right] + \dots + \left[\frac{n+2^{l_0}}{2^{l_0+1}} \right] + \left[\frac{n}{2^{l_0+2}} \right] + \left[\frac{n}{2^{l_0+2}} + \frac{1}{2} \right] = \\ &= \left[\frac{n+1}{2} \right] + \left[\frac{n+2}{4} \right] + \dots + \left[\frac{n+2^{l_0}}{2^{l_0+1}} \right] + \left[\frac{n+2^{l_0+1}}{2^{l_0+2}} \right] + \left[\frac{n}{2^{l_0+2}} \right]. \end{aligned}$$

(3) tehát $l = l_0 + 1$ -re is fennáll. Ha l -et akkorára választjuk, hogy $2^{l+1} > n$ legyen, akkor az utolsó tag értéke 0, s így az (1) összeg értékére kapjuk, hogy az n .

A felhasznált (2) azonosság bizonyítását két esetre választjuk szét. Ha

$$[x] \leq x < [x] + \frac{1}{2}, \quad \text{akkor} \quad [x] < [x] + \frac{1}{2} \leq x + \frac{1}{2} < [x] + 1,$$

tehát

$$\left[x + \frac{1}{2} \right] = [x], \quad \text{és így} \quad [x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = 2[x] \leq 2x < 2[x] + 1,$$

amiből

$$[2x] = 2[x] = [x] + \left[x + \frac{1}{2} \right].$$

Ha pedig

$$[x] + \frac{1}{2} \leq x < [x] + 1, \quad \text{akkor} \quad [x] + 1 \leq x + \frac{1}{2} < [x] + \frac{3}{2} < [x] + 2,$$

tehát

$$\left[x + \frac{1}{2} \right] = [x] + 1, \quad \text{és így} \quad [x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = 2[x] + 1 \leq 2x < 2[x] + 2,$$

amiből ismét

$$[2x] = 2[x] + 1 = [x] + \left[x + \frac{1}{2} \right].$$

Megjegyzések. 1. A bizonyítás (3)-at valamivel általánosabban, tetszőleges pozitív n -re adja, ha a bal oldalon n helyére $[n]$ -ét írunk, s így az (1) összeg is tetszőleges pozitív n -re $[n]$ -ét adja.

2. A (2) azonosságnak és a látott megoldás alapján (1)-nek konkrét tartalmát látjuk a következő probléma megválaszolásában.

Játsszék bizonyos számú versenyző – pl. pingpongozó – a szokásos módon kieséses versenyt, vagyis kettesével játszanak egymás ellen, minden párból a nyertes jut a második fordulóra, továbbá játék nélkül a pár nélkül maradt versenyző – amennyiben ilyen van, ti. ha az indulók száma páratlan; ugyanígy alakul ki a 3., a 4., ... forduló mezőnye, végül az nyeri a bajnoki érmet, aki veretlenül marad. Tegyük még fel, hogy minden vesztes vigaszdíjként megkapja a mérkőzésén használt pingponglabdát. – Kérdés: hány mérkőzés folyik le, más szóval hány labda kerül kiadásra az egyes fordulókban?

Bármelyik forduló indulóinak számát v -vel jelölve a fordulóban $\left[\frac{v}{2} \right]$ mérkőzés folyik le. Ennyi a továbbjutók száma is, ha v páros; ha pedig páratlan, akkor 1-gyel több. Számuk v párosságától függetlenül $\left[\frac{v}{2} + \frac{1}{2} \right] = \left[\frac{v+1}{2} \right]$ alakban írható, eszerint a (2)-nek megfelelő

$$v = \left[\frac{v}{2} \right] + \left[\frac{v+1}{2} \right]$$

azonosság azt fejezi ki, hogy minden versenyző vagy kiesik, vagy továbbjut. Másrészt az egész verseny folyamán 1-gyel kevesebb labdát adnak ki, mint az indulók száma, hiszen a bajnok kivételével mindenki kiesik előbb-utóbb. A kiadandó labdák számát n -nel jelölve az első forduló indulóinak, kiesőinek és továbbjutóinak száma rendre

$$n + 1, \quad \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \quad \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor,$$

a másodikban kiesők, ill. a továbbjutók) száma

$$\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+2}{2^2} \right\rfloor, \quad \text{ill.} \quad \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n+2}{2} + 1 \right\rfloor}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+2}{2^2} \right\rfloor,$$

könnyű ugyanis belátni, hogy ha a, b, c természetes számok, akkor

$$\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor}{c} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{bc} \right\rfloor \quad \text{és} \quad \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + c = \left\lfloor \frac{a}{b} + c \right\rfloor.$$

Általában a k -adik fordulóból továbbjutott $\left\lfloor \frac{n+2^k}{2^k} \right\rfloor$ versenyző közül labdát kap, ill. továbbjut

$$\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n+2^k}{2^k} \right\rfloor}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor, \quad \text{ill.} \quad \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n+2^k}{2^k} + 1 \right\rfloor}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+2^{k+1}}{2^{k+1}} \right\rfloor,$$

tehát (1) tagjai az egymás utáni fordulókbán kiadott labdák számát adják, összegük pedig n -et, az összes labdák számát.