

I. megoldás. A szóba jövő x értékekről egy első tájékoztatást nyerhetünk abból, hogy $x - 1 < [x] \leq x$. Az egyenlet bal oldalán álló kifejezést csökkentjük, vagy legalábbis nem növeljük, ha $[x]$ helyére x -et írunk benne, és növeljük, ha helyette $x - 1$ -et írunk. Azokra az x -ekre tehát, amelyekre az egyenlet teljesül,

$$x^3 - 40x - 78 \leq 0 \quad \text{és} \quad x^3 - 40x - 38 > 0,$$

azaz

$$38 < x(x^2 - 40) < 78.$$

Itt vagy mind a két tényező pozitív, vagy mind a kettő negatív. Az első esetben $x > \sqrt{40}$, és a középső kifejezés növekedő x -szel nő. Így, mivel $x = 8$ -nál az értéke már 78-nál nagyobb, tehát

$$\sqrt{40} < x < 8.$$

A második eset akkor következik be, ha

$$-\sqrt{40} < x < 0.$$

Az ezeknek a feltételeknek megfelelő x értékek egész része a következő lehet:

$$-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 6, 7.$$

Ezekkel az értékekkel mint $[x]$ értékekkel kiszámítva az egyenlet szerint adódó

$$(2) \quad x = \sqrt[3]{40[x] + 78}$$

értékkel akkor kapjuk az egyenlet egy gyökét, ha egész része a kiindulásul használt érték lesz. Ezek az értékek táblázat alapján két tizedesjegy pontossággal rendre

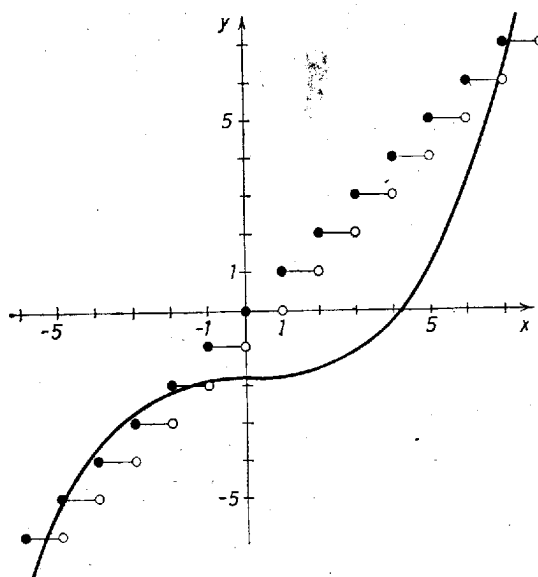
$$-5,87; \quad -5,45; \quad -4,96; \quad -4,34; \quad -3,48; \quad -1,26; \quad 3,36; \quad 6,83; \quad 7,10.$$

Közülük az aláhúzott öt érték teljesíti a mondott feltételt, tehát ezek adják az egyenlet gyökeit.

II. megoldás. Grafikusan oldjuk meg az egyenletet, az átrendezett

$$(3) \quad \frac{x^3 - 78}{40} = [x]$$

alakjának két oldalán álló függvényeket külön-külön ábrázoljuk, és leolvassuk a két grafikon minden egyes közös pontjának abszcisszáját, ez adja egy-egy gyök közelítő értékét.



Az ábráról a $(-6, 8)$ intervallumban kb. 0,05 (1/20 egység) pontossággal a következő gyökök olvashatók le:

$$\begin{aligned} x_1 &= -5,45, & x_2 &= -4,95, \\ x_3 &= -1,25, & x_4 &= 6,85, & x_5 &= 7,10. \end{aligned}$$

x_5 -nél nagyobb gyök nincs. Ugyanis az $y = [x]$ függvény x -nek 1 egységnyi növekedése esetén 1-gyel nő. Viszont a (3) bal oldalán álló függvény növekedése, ha x helyére $x + 1$ -et írunk:

$$\frac{(x+1)^3 - 78}{40} - \frac{x^3 - 78}{40} = \frac{3x^2 + 3x + 1}{40} = \frac{3}{40} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{160},$$

ennek értéke $x > 7$ esetén nagyobb 3-nál, a bal oldal képe mindig fölötte van $y = [x]$ képének.

Hasonlóan nincs x_1 -nél kisebb gyök, mert a talált másodfokú függvény értéke $x < -6$ esetén is nagyobb 2-nél, tehát a bal oldal képe mindig alatta van $y = [x]$ képének.

Megjegyzés. A megoldást továbbfejlesztve a gyökök tetszés szerinti pontossággal meghatározhatók. A metszéspon-
tokban leolvashatjuk $[x]$ értékét, ez rendre -6 , -5 , -2 , 6 , ill. 7 , ennek ismeretében pedig (1) tiszta harmadfokú
egyenlet. (2) alapján, köbgyöktáblázat felhasználásával, 4 tizedes pontossággal:

$$x_1 = \sqrt[3]{-162} = -5,4514,$$

$$x_4 = \sqrt[3]{318} = 6,8256,$$

$$x_2 = \sqrt[3]{-122} = -4,9597,$$

$$x_5 = \sqrt[3]{358} = 7,1006.$$

$$x_3 = \sqrt[3]{-2} = -1,2599,$$

Zambó Péter (Miskolc, Földes F. Gimn., IV. o. t.)