

I. megoldás *a)* Azt kell belátnunk, hogy ha c és d természetes számok, akkor

$$(1) \quad c(c+1) = d(d+2)$$

nem teljesülhet. Valóban, ha $d \geq c (> 0)$, akkor $d+2 > c+1$, tehát a jobb oldalon nagyobb szám áll, mint balról. Ha pedig $(0 <) d < c$, akkor $d+2 \leq c+1$, és a jobb oldalon kisebb szám áll, tehát semmiképpen nem áll fenn egyenlőség.

b) Annak belátását, hogy az

$$(2) \quad m^4 + (m+1)^4 = n^2 + (n+1)^2$$

egyenlőség nem teljesülhet, ha m, n természetes számok, visszavezetjük az *a)* állításra. Kifejtéssel, majd 1-et mindkét oldalon elhagyva, 2-vel osztva, végül mindkét oldalt szorzattá alakítva (2) így alakul:

$$\begin{aligned} m^4 + 2m^3 + 3m^2 + 2m &= n^2 + n, \\ (m^2 + m)(m^2 + m + 2) &= n(n+1), \end{aligned}$$

és itt $m^2 + m$ természetes szám. Ez pedig (1) szerint lehetetlen.

Gajdács Ibolya (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás *a)* Elég azt belátnunk, hogy ha c természetes szám, az

$$x(x+2) = c(c+1), \quad \text{azaz} \quad (x+1)^2 = c^2 + c + 1$$

egyenlet pozitív gyöke:

$$x = -1 + \sqrt{c^2 + c + 1},$$

nem egész szám. Valóban, a gyök alatti D egész számra fennáll a következő kettős egyenlőtlenség:

$$\begin{aligned} c^2 < D < c^2 + 2c + 1 &= (c+1)^2, \quad \text{vagyis} \\ c < \sqrt{D} < c+1, \end{aligned}$$

és itt $c, c+1$ szomszédos természetes számok, ezért $\sqrt{D}$ nem természetes szám, tehát az 1-gyel kisebb x sem egész.

b) Ha m természetes szám, az

$$\begin{aligned} x^2 + (x+1)^2 &= m^4 + (m+1)^4, \quad \text{másképpen} \\ x^2 + x &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = m^4 + 2m^3 + 3m^2 + 2m \end{aligned}$$

egyenlet pozitív gyöke:

$$x = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{4m^4 + 8m^3 + 12m^2 + 8m + 1} \right),$$

és ez nem egész szám, mert nem racionális szám. Valóban, a diszkrimináns egész szám, de nem teljes négyzet, hiszen közéje esik a $2m^2 + 2m + 1$ és $2m^2 + 2m + 2$ szomszédos természetes számok négyzetének, ami

$$\begin{aligned} 4m^4 + 8m^3 + 8m^2 + 4m + 1, \quad \text{ill.} \\ 4m^4 + 8m^3 + 12m^2 + 8m + 4. \end{aligned}$$

Ezzel az állításokat bebizonyítottuk.

Fal Imre (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., IV. o. t.)
Gegesy Ferenc (Budapest, Móricz Zs. Gimn., IV. o. t.)