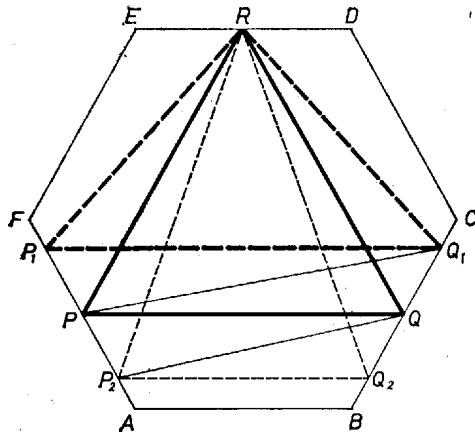


I. megoldás. Legyen az $S = ABCDEF$ szabályos hatszögbe beírt $H = PQR$ háromszögnek PQ oldala az AB oldallal párhuzamos úgy, hogy P az AF oldalon van, tehát Q a BC -n. Nyilvánvaló, hogy így akkor legnagyobb H területe, ha R a DE oldalon van, továbbá R -et a DE oldalon mozgatva (és PQ -t változtatlanul hagyva) a terület nem változik. Ezért R -et rögzíthetjük DE felezőpontjában.

Megmutatjuk, hogy H területe akkor a legnagyobb, ha P felezi az AF oldalt: $PA = PF$. Legyen ekkor P_1 a PF szakaszon, és mossa a rajta átmenő, AB -vel párhuzamos egyenes BC -t Q_1 -ben.



1. ábra

Ekkor, minden idom területét ugyanúgy jelölve, mint magát az idomot (1. ábra):

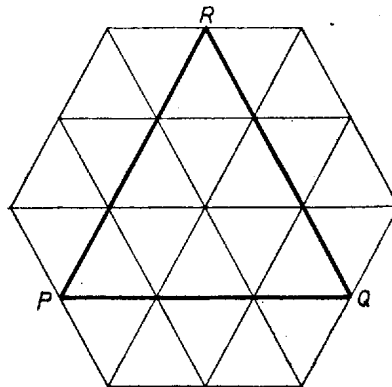
$$\begin{aligned} H_1 = P_1Q_1R &= PQR + PP_1R + QQ_1R - QQ_1P - PP_1Q_1 = \\ &= PQR - (PP_1Q_1 - PP_1R) < PQR = H, \end{aligned}$$

hiszen a feltevés miatt $PR \parallel BC$ és emiatt $QQ_1R - QQ_1P = 0$, másrészt $RQ \parallel AF$ és Q_1 a QC szakaszon van, tehát messzebb van PP_1 -től, mint Q és R , és így a zárójelbeli különbség pozitív, a kivonandó elhagyásával a kifejezést növeltük.

Hasonlóan ha P_2 a PA szakaszon van és $P_2Q_2 \parallel AB$, akkor Q_2 a BQ -n adódik és

$$\begin{aligned} H_2 = P_2Q_2R &= PQR + PP_2Q + QQ_2P_2 - PP_2R - QQ_2R = PQR - \\ &- (PP_2R - PP_2Q) - (QQ_2R - QQ_2P_2) < PQR = H, \end{aligned}$$

mert az első zárójel 0, a második pozitív, hiszen P_2 közelebb van BC -hez, mint R és P .

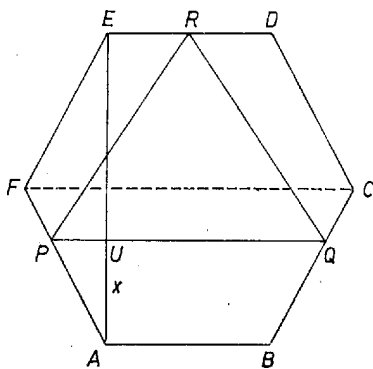


2. ábra

Ezek szerint az előírt tulajdonságú, legnagyobb területű H háromszög az S -nek $9/24 = 3/8$ részét teszi ki (2. ábra), ez a vizsgálandó arány legnagyobb értéke.

Ágoston Péter (Budapest, Berzsényi D. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Legyen PQ távolsága AB -től $x (\leq AE/2 = AB\sqrt{3}/2)$, és mossa PQ az AE -t U -ban (3. ábra).



3. ábra

Ekkor a szimmetriára tekintettel

$$\begin{aligned}
 PQR &= \frac{1}{2}PQ \cdot UE = \\
 &= \frac{1}{2}(AB + 2PU)(AE - AU) = \\
 &= \frac{1}{2}\left(AB + \frac{2}{\sqrt{3}}x\right)(AB\sqrt{3} - x) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{AB\sqrt{3}}{2} + x\right)(AB\sqrt{3} - x).
 \end{aligned}$$

A változó tényezők összege állandó, így – mint ismeretes – szorzatuk akkor a legnagyobb, ha a két tényező egyenlő, amiből

$$x = \frac{AB\sqrt{3}}{4} = \frac{AE}{4},$$

vagyis PQ felezi AB és FC távolságát: $PA = PF$.

Takács Andor (Csurgó, Csokonai Vitéz M. Gimn., IV. o. t.)