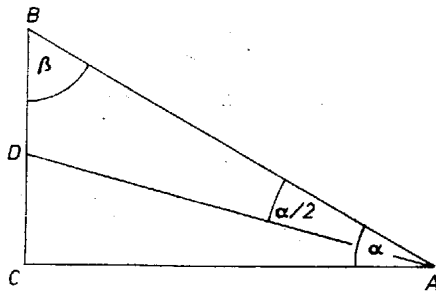


Megoldás. I. Legyenek a kérdéses ABC derékszögű háromszög befogói CA , CB úgy, hogy az A -ból induló AD szögfelezőre teljesül $AD : DB = k$.



A szögeket a szokás szerint jelölve az ABD háromszögből a sinustétel, valamint a kétszeres szögek függvényeire vonatkozó azonosság alapján egyenletet kapunk $\sin \frac{\alpha}{2}$ -re:

$$(1) \quad k = AD : DB = \sin \beta : \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha : \sin \frac{\alpha}{2} = \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) : \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$(2) \quad 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + k \sin \frac{\alpha}{2} - 1 = 0,$$

és innen egyértelműen

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} \left(\sqrt{k^2 + 8} - k \right)$$

(ugyanis a negatív gyököt mindjárt elhagytuk).

II. k -t természetesen pozitívnak tekintve minden értéke mellett kapunk háromszöget. Ugyanis $\frac{\alpha}{2} < 45^\circ$ miatt csak $0 < \sin \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ fogadható el, ez viszont minden $k > 0$ esetén teljesül, mert

$$\sqrt{k^2 + 8} < k + \sqrt{8},$$

ugyanis

$$\left(k + \sqrt{8}\right)^2 = k^2 + 8 + 2\sqrt{8} > k^2 + 8.$$

Így

$$\frac{1}{4} \left(\sqrt{k^2 + 8} - k \right) < \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

α -t kiszámítva egyértelműen megkapjuk β -t.

$$k = \frac{7}{2} \text{ esetén } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}, \quad \cos \alpha = \frac{7}{8} = 0,875,$$

$$\alpha = 28^\circ 57', \quad \beta = 61^\circ 3'.$$

III. Az ABC háromszög egyenlő szárú, ha $\alpha = 45^\circ$, azaz (1) alapján, ha

$$k = \frac{\cos 45^\circ}{\sin 22,5^\circ} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 22,5^\circ} = 2 \cos 22,5^\circ = 2 \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \approx 1,841.$$

(Az ABD háromszög pedig $k = 1$, azaz $\alpha = 60^\circ$ esetén egyenlő szárú.)

Graffjádi László (Miskolc, Földes F. Gimn., III. o. t.)

Körtvélyessy Péter (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Azt, hogy a (2)-ből $\sin \frac{\alpha}{2}$ -re adódó pozitív érték mindig kisebb $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -nél, így is kapjuk: egyenletünk bal oldala $\sin \frac{\alpha}{2} = 0$ esetén -1 , negatív, $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ esetén pedig $\frac{k}{\sqrt{2}}$, pozitív, a gyök a két korlát között van. Ebben arra támaszkodtunk, hogy a bal oldal grafikonja a $0 \leq \sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ intervallumban folytonos vonal.