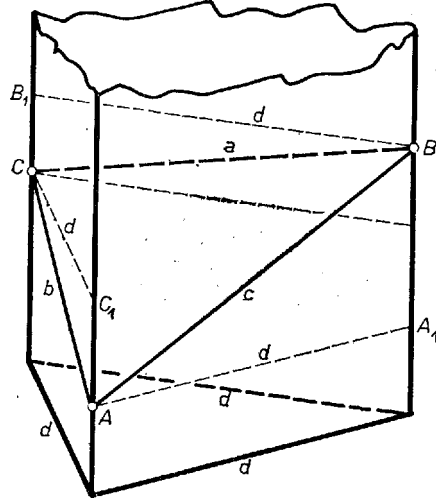


I. Legyen a metszet  $A$  csúcsának merőleges vetülete a  $B$ -t tartalmazó oldalélen  $A_1$ , ugyanígy  $B$  és  $C$  vetülete a  $C$ -t, ill.  $A$ -t tartalmazó oldalélen  $B_1$ , ill.  $C_1$ .



Így  $AA_1 = BB_1 = CC_1 = d$ , és az  $ABC$  háromszög csúcsainak magasságkülönbsége (a hasáb alapháromszögét vízszintes síkra téve) az  $ABA_1$ ,  $BCB_1$ ,  $CAC_1$  derékszögű háromszögekből rendre

$$(1) \quad A_1B = \sqrt{c^2 - d^2}, \quad B_1C = \sqrt{a^2 - d^2}, \quad C_1A = \sqrt{b^2 - d^2}.$$

Az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  szakaszokhoz egyenértékű szerepet játszanak a feladatban, ezért föltehetjük, hogy nagyságviszonyuk:

$$a \leq b \leq c,$$

ezért

$$A_1B \geq C_1A \geq B_1C,$$

és ebből

$$\begin{aligned} A_1B &= C_1A + B_1C, \\ \sqrt{c^2 - d^2} &= \sqrt{b^2 - d^2} + \sqrt{a^2 - d^2}, \end{aligned}$$

hiszen a legnagyobb magasságkülönbség egyenlő a másik kettő összegével, az  $ACB$  törött vonalдарabon két lépésben ugyanannyit emelkedünk, mint a két végpontját összekötő egyenes szakaszon. Négyzetreemeléssel, átrendezéssel, újabb négyzetreemeléssel, végül 0-ra redukálva az egyenletet:

$$\begin{aligned} c^2 - d^2 &= a^2 + b^2 - 2d^2 + 2\sqrt{(a^2 - d^2)(b^2 - d^2)}, \\ d^2 + c^2 - a^2 - b^2 &= 2\sqrt{(a^2 - d^2)(b^2 - d^2)}, \\ d^4 + 2(c^2 - a^2 - b^2)d^2 + (c^2 - a^2 - b^2)^2 &= 4a^2b^2 - 4(a^2 + b^2)d^2 + 4d^4, \\ (2) \quad 3d^4 - 2(a^2 + b^2 + c^2)d^2 + \{4a^2b^2 - (c^2 - a^2 - b^2)^2\} &= 0, \end{aligned}$$

ami  $d^2$ -re másodfokú egyenlet.

A diszkrimináns  $1/4$  része így alakítható:

$$\begin{aligned} D &= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 12a^2b^2 + 3(c^2 - a^2 - b^2)^2 = \\ &= 4(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2) = \\ (3) \quad &= (a^2 + c^2 - 2b^2)^2 + 3(c^2 - a^2)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

tehát a  $d^2$ -re adódó értékek valósak (az utolsó lépésben az idézett megoldás egyik átalakítását fordított irányban alkalmaztuk).

Könnyű megmutatni másrészt az  $U^2 - V^2 = (U - V)(U + V)$  szorzattá alakítás háromszori alkalmazásával, hogy az egyenlet  $d$ -t nem tartalmazó tagja egyenlő az  $ABC$  háromszög területe 4-szeresének négyzetével, tehát pozitív szám.  $d^2$  együtthatója viszont negatív (és  $d^4$  együtthatója pozitív), vagyis a két (valós)  $d^2$  gyöknek a szorzata is, összege is pozitív, tehát mindkettő pozitív.

A (2) gyökei csak  $D = 0$  esetén egyenlők, és ez csak akkor áll be, ha (3)-nak mindkét tagja 0, azaz  $c^2 = a^2$ , és így az első tagból  $a^2 = b^2$ , vagyis ha  $a = b = c$ . Ekkor, mint könnyen látható,  $d$  is egyenlő velük.

Ha viszont  $a$ ,  $b$  és  $c$  nem mind egyenlők, akkor  $D > 0$ , és a  $d^2$ -re adódó nagyobbik érték nagyobb  $a^2$ -nél, tehát (1) szerint feladatunk szempontjából nem használható, eszerint a szabályos háromszög alapidom keresett oldalhosszára nézve egyértelműen

$$(4) \quad d^2 = \frac{1}{3}\{a^2 + b^2 + c^2 - 2\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2}\}.$$

II. Az 1527. feladatban az egyenes hasáb alapháromszögének oldalai voltak  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , és a hasáb szabályos háromszög alakú (ferde) metszetének  $d$  oldalára kapott eredmény (4)-től csak a négyzetgyök előjelében tér el. Eszerint az a  $d$  érték – bár kissé más összefüggésekből kaptuk – számértékben egyenlő (2)-nek a nagyobbik gyökével.

*Draschitz Rudolf* (Budapest, Landler J. Gépip. Techn.)

*Nagy Zsigmond* (Budapest, Kaffka M. Gimn.)