

Nyilvánvaló, hogy egy adott R_m szabályos m -szög két átlója akkor és csak akkor egyenlő, ha $2 - 2$ végpontjuk úgy osztja R_m területét $2-2$ részre, törött vonalra, hogy a részek páronként R_m -nek ugyanannyi oldalából állnak. Pl. a $C_0C_1 \dots C_{m-1} = R_m$ -ben $C_iC_j = C_pC_q$ (ahol $0 \leq i < i+2 \leq j \leq m-1$, és $0 \leq p < p+2 \leq q \leq m-1$) akkor és csak akkor egyenlő, ha

$$j - i = q - p, \text{ vagy } m - (j - i) = q - p.$$

Erre támaszkodva a C_iC_j átló hosszát a $j - i$ és $m - (j - i)$ számok kisebbikével jellemezzük. Nem okozhat félreértést, ha röviden azt mondjuk, hogy a C_iC_j átló hossza $j - i$, ill. $m - (j - i)$.

Megmutatjuk, hogy R_m háromszögelésében kiválasztható $n + 1$ olyan átló, amelyek $d_{n+1}, d_n, d_{n-1}, \dots, d_2, d_1$ hosszai szigorúan monoton csökkenő sorozatot alkotnak; és $d_1 \geq 2$.

Ha R_m -nek O középpontján áthalad egy a háromszögelésben felhasznált átló, úgy ennek hosszát, $m/2$ -t választjuk a kívánt d_{n+1} szám szerepére, ha pedig O a háromszögelés egy H háromszögének belső pontja, akkor H legnagyobb oldalának (legnagyobb oldalai egyikének) hosszát. (A „legnagyobb oldal” kifejezést tovább is mindig így értjük.) Az utóbbi esetben, amennyiben H -nak mindegyik oldala R_m -nek átlója, úgy hosszaik összege m , hiszen R_m -nek minden egyes oldalát H -nak egy oldala választja el O -tól, ezért a kiszemelt legnagyobb oldal hossza:

$$(1) \quad \begin{aligned} d_{n+1} &\geq \frac{m}{3} > 2^n, \text{ tehát} \\ 2^n + 1 &\leq d_{n+1} \leq \frac{m}{2} < 3 \cdot 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Könnyű belátni, hogy ez az eredmény akkor is érvényes, ha H valamelyik oldala az R_m -nek is oldala.

A további $d_n, \dots, d_1$ átlóhosszúságok egy-egy képviselőjének kiválasztásában R_m -nek a felére, ill. arra a kisebbik részére szorítkozunk, amelyet belőle a kiválasztott, d_{n+1} hosszúságú átló metsz le.

R_m eredeti háromszögelése a megtartott A_n részt is háromszögekre osztja, és a d_{n+1} átlót egyetlen további átló sem metszi át. Így A_n háromszögelésének egy H_n háromszöge a d_{n+1} átlóra támaszkodik. A d_n szám szerepére H_n további két oldala közül a nagyobbiknak a hosszát választjuk. Ez kisebb d_{n+1} nél, hiszen nem metszi le A_n és R_m kerülete közös részéből azokat az oldalakat, amiket H_n mellőzött oldala metsz le, ill. magát ezt az egy oldalt, ha az egyszersmind R_m -nek is oldala; másrészt a kiválasztás és (1) miatt

$$d_n \geq \frac{d_{n+1}}{2}, \quad d_n \geq 2^{n-1} + 1.$$

Ezután A_n -nek arra az A_{n-1} részére szorítkozunk, amelyet a kiválasztott, d_n hosszúságú átló metsz le belőle.

Eljárásunkat még legalább $n - 1$ -szer megismételhetjük, mert az innen számított $n - 1$ -edik lépésben a meghagyott A_1 részdíom d_2 -re támaszkodó H_1 háromszögében a hosszabbik oldalra fennáll

$$d_1 \geq 2^0 + 1 = 2,$$

tehát még d_1 is átló. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Lempert László (Budapest, Radnóti M. Gimn.)

Megjegyzés. Az állítás nem élesíthető, mert $m = 3 \cdot 2^n$ -t véve már nem minden felbontásban lép fel $n + 1$ különböző átlóhosszúság. Pl. $n = 0$ és 1 esetén $m = 3$, ill. 6 , és a szabályos háromszögben nem húzható átló, a szabályos hatszög pedig háromszögelhető csak egyféle hosszúságú átlókkal, 3 db rövidebb átlójával, középen egy szabályos háromszöget kialakítva.

Lempert László