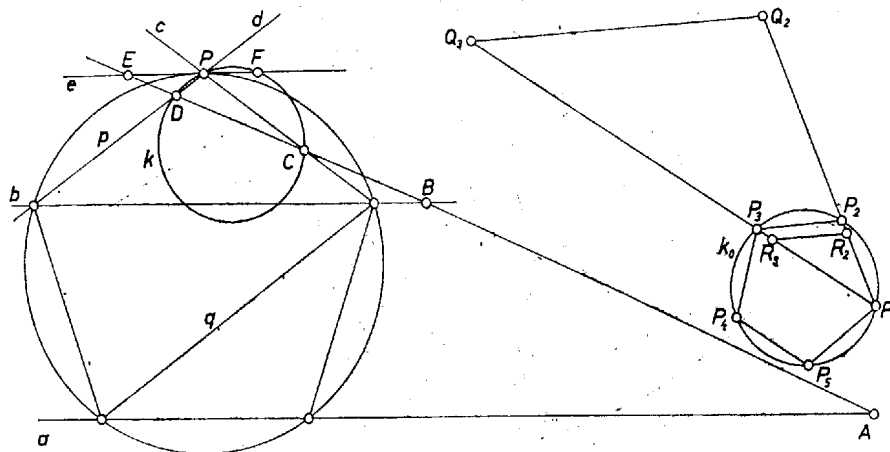


I. megoldás. Jelöljük a keresett ötszögnek az adott A, C, D , pontokon átmenő oldalegyeneseit, ill. a B ponton átmenő átlójának egyenesét rendre a, c, d , ill. b betűvel. A b, c, d egyenesek egyenlő szárú háromszöget határoznak meg, melynek b -n van az alapja, és az ezen fekvő szögei 36° -osak; az a egyenes pedig párhuzamos b -vel. Elegendő ezt a négy egyenest meghatároznunk, hiszen a keresett ötszöget egyértelműen meghatározzák: a b, c, d egyenesek metszéspontjai az ötszög 3 csúcsát adják, az ezeken átmenő kör pedig az a egyenesből kimetszi a hátra levő két csúcsot.

Legyen a c , d egyenesek metszéspontja P . Elegendő ezt meghatároznunk, hiszen PC , PD megadja a c , d egyenest, az általuk meghatározott szögek közül a kisebbiket felező egyenes megadja a és b állását, tehát e szögfelezővel A -n, B -n át húzott párhuzamos adja az a , ill. b egyenest.



1. ábra

Húzzunk párhuzamost P -n át b -vel, jelöljük a kapott egyenest e -vel, az adott szelővel alkotott metszéspontját E -vel. A d egyenesnek e és b közti szakasza egyenlő az ötszög p oldalával, a b és a egyenesek közti szakasza pedig egyenlő az ötszög p -vel párhuzamosan haladó q átlójával. A párhuzamos szelők tétele alapján

$$(1) \quad AB : BE = q' : p.$$

A $q : p$ arány tetszőleges szabályos ötszögben meghatározható, az AB szakaszhoz tehát megszerkeszthetjük a BE szakaszt, az AD egyenesen így kijelölhetjük az E pontot.

P -ből a CD szakasz 108° -os vagy 72° -os szög alatt látszik. A megfelelő négy látóörív alkalmas párokba kapcsolva két, a CD egyenesre nézve szimmetrikusan elhelyezkedő kört alkot. Elegendő közülük az egyiket felvennünk, ugyanis a belőle származtatott megoldást az AD egyenesre tükrözve a másiktól levezethető megoldást kapjuk. Legyen ez a kör k . Mivel e a c, d egyenesek által meghatározott szögek közül a kisebbiket felezi, egyszersmind k -nak a CD húrhoz tartozó ívei közül a rövidebbet is felezi.

Adataink alapján a k kör és az ennek rövidebb CD ívét felező F pont meghatározható, és ekkor az EF egyenes kimetszi k -ból a keresett P pontot. Ezek szerint a szerkesztés a következő.

Tetszőleges k_0 körbe (az ismert módon) szabályos ötszöget szerkesztünk, legyen ennek három, egymás utáni csúcsa P_1, P_2, P_3 . P_1 -ből P_3 irányában felmérjük a $P_1Q_3 = AB$ szakaszt. Q_3 -on át párhuzamost húzunk P_2P_3 -mal, ez a P_1P_2 egyenest Q_2 -ben metszi. Ekkor a Q_2Q_3 szakaszt az AB szakasz B -n túli meghosszabbítására felmérve kapjuk E -t.

Mérjük fel P_1 -ből P_3 felé a $P_1R_3 = CD$ szakaszt és messük az R_3 -on átmenő, P_2P_3 -mal párhuzamosan húzott egyenessel P_1P_2 -t R_2 -ben. A CD szakasz fölé a $P_1R_2R_3$ háromszöggel egybevágó háromszöget szerkesztünk, ennek harmadik csúcsa F ($CF = DF$). A CDF háromszög köré írt k kört az EF egyenes másodszor a P pontban metszi. P ismeretében a keresett ötszög a fent előre leírt módon határozható meg.

A szerkesztés mindig végrehajtható. Megemlítjük, hogy ha P a C ponttal azonosnak adódik, akkor a c egyenest nem határozzák meg a P , C pontok, így C -t a PD egyenesnek PF -re vonatkozó tükörképeként kell előállítanunk. Ekkor az adott szelő az ötszög egyik oldalegyenese. (A szelőnek bármely a C utáni D' pontjából kiindulva ugyanaz az ötszög adódik.) Hasonló a helyzet, ha P a D -vel adódik azonosnak.

Megmutatjuk, hogy a kapott ötszög valóban szabályos. Mivel F felezi k -nak a c , d egyenesek közti rövidebb ívét, e felezi a c , d egyenesek által meghatározott kisebbik szöget. b -t e -vel párhuzamosnak szerkesztettük, a b , c , d egyenesek tehát egyenlő szárú H háromszöget határoznak meg, amelynek alapja b -n van és az alapján levő szögek 36° -osak (egyenlők a c , d közti kisebbik szög, a 72° felével). A H köré írható körbe írt, P csúcsú szabályos ötszög P -vel szomszédos csúcsai tehát azonosak H megfelelő csúcsaival. Az ötszög P -vel szemközti a^* oldalának b -től mért távolsága úgy aránylik b -nek P -től mért távolságához, mint az ötszög átlója az oldalához, tehát mint AB a BE szakaszhoz. Eszerint (1) miatt az a^* egyenes azonos a -val, a kapott ötszög valóban szabályos.

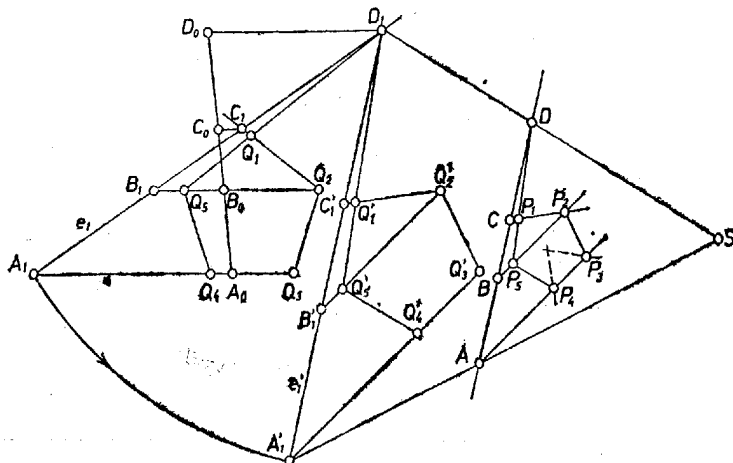
II. megoldás. A feladat megfordításaként először egy alkalmas szabályos ötszöghöz olyan szelő egyenest szerkesztünk, melyen a megfelelő oldal-, ill. átlóegyeneseek által kimetszett, egymás utáni A', B', C', D' pontok közti szakaszok

aránya megegyezik az adott s szelőn levő szakaszok arányával:

$$A'B' : B'C' : C'D' = AB : BC : CD.$$

Azután ezen ötszög és szelő együttes alakzatát úgy fordítjuk el és nagyítjuk vagy kicsinyítjük, hogy A' , B' , C' , D' megfelelője rendre az adott A , B , C , ill. D pontba essék.

Olyan $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5 = Q$ szabályos ötszögből indulunk ki, melyben a Q_3Q_4 oldal és a vele párhuzamos Q_2Q_5 átló távolsága kisebb az AB szakasznál (2. ábra).



2. ábra

Legyen Q_3Q_4 tetszés szerinti pontja A_0 , az A_0 körüli, AB sugarú körnek Q_2Q_5 -ön levő pontja B_0 , és az A_0B_0 félegyenese C_0 , D_0 az a pont, amelyre $A_0C_0 = AC$, $A_0D_0 = AD$. Húzzunk párhuzamost Q_3Q_4 -gyel C_0 -on és D_0 -on át, és mossa ez a Q_1Q_2 , ill. Q_1Q_5 egyenest a C_1 , ill. D_1 pontban, végül legyen a C_1D_1 egyenesnek Q_3Q_4 -en levő pontja A_1 , Q_2Q_5 -ön levő pontja B_1 . Ekkor nyilvánvalóan

$$A_1B_1 : B_1C_1 : C_1D_1 = A_0B_0 : B_0C_0 : C_0D_0 = AB : BC : CD,$$

tehát a keresett szelő a $C_1D_1 = e_1$ egyenes.

Fordítsuk el Q és e_1 alakzatát D_1 körül úgy, hogy a D_1A_1 félegyenese a DA félegyenessel párhuzamos és egyirányú $D_1A'_1$ helyzetbe jusson, és legyen ekkor C_1 , B_1 , valamint Q új helyzete C'_1 , B'_1 , ill. $Q'_1Q'_2Q'_3Q'_4Q'_5 = Q'$, továbbá AA'_1 és DD_1 metszéspontja S . Így a fentiek szerint BB'_1 és CC'_1 ugyancsak átmennek S -en, tehát A , B , C , D rendre az A'_1 , B'_1 , C'_1 , D_1 pont képe egy S középpontú, alkalmas arányú hasonlósági transzformációban, ezért a keresett $P_1P_2P_3P_4P_5$ ötszög P_3P_4 , P_2P_5 , P_1P_2 , P_1P_5 oldal-, ill. átlóegyenese rendre az A -n, B -n, C -n, D -n át, rendre $Q'_3Q'_4$ -vel, $Q'_2Q'_5$ -vel, $Q'_1Q'_2$ -vel, ill. $Q'_1Q'_5$ -vel párhuzamosan húzott egyenes lesz. Ezek alkalmas párainak metszéspontja adja P_1 -et, P_2 -t, P_5 -öt, végül P_3 -at, P_4 -et az A -n át $Q'_3Q'_4$ -vel húzott párhuzamosból P_1P_5 , ill. P_1P_2 felező merőlegese metszi ki.

A szerkesztés a fentiek szerint egyértelműen végrehajtható. Ha azonban C_1 (vagy D_1) éppen Q_1 -be esik, akkor e_1 -ként a Q_1Q_5 (ill. Q_1Q_2) oldalegyenes adódik, és D_1 nem egyedüli közös pontja e_1 -nek és Q_1Q_5 -nek. Ez a kapcsolat természetesen megmarad az elfordítással és nagyítással kapott $P_1P_2P_3P_4P_5$ ötszög és az adott s között is.

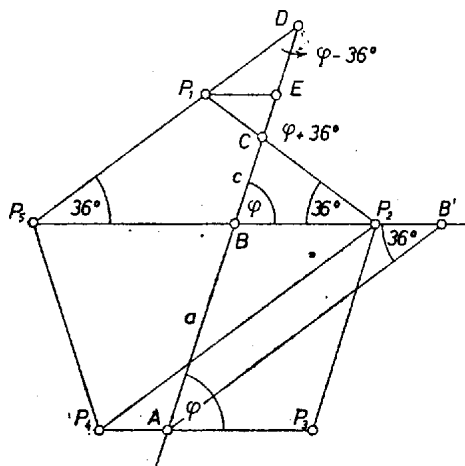
A szerkesztés helyességének bizonyítását az olvasóra hagyjuk.

Kovalszky Róbert (Budapest, Landler J. Gimn.) dolgozatának felhasználásával

Megjegyzés. A megoldás első részében lényegében az s szelő és a P_3P_4 egyenes közti szöveget szerkesztettük meg. Ezt számítással készíti elő a következő megoldás.

III. megoldás (vázlat). A fentebbi jelöléseket tovább használva s és a P_3P_4 egyenes közti φ szöveget szerkesztjük meg arra a helyzetre, amikor C a P_1P_2 oldalszakaszra jut, D pedig a P_1P_5 oldal meghosszabbítására (3. ábra), számítással előkészítve¹ C és D ezen korlátozása folytán B a P_2P_5 szakaszon van, és $36^\circ \leq \varphi \leq 144^\circ$.

¹ Legtöbb versenyzőnk ezen az úton oldotta meg (vagy közelítette meg) a feladatot, és ugyanez volt a helyzet annak idején a tanulmányi versenyen is.



3. ábra

Legyen $BA = a$, $BC = c$, $BD = d$, és mossa P_2P_5 -öt az A -n átmenő, P_2P_4 -gyel párhuzamos egyenes B' -ben. $P_2CD \sphericalangle = \varphi + 36^\circ$, $BDP_5 \sphericalangle = \varphi - 36^\circ$, így a szinusz tételt alkalmazva rendre a BAB' , BCP_2 , BDP_5 háromszögre:

$$AB' = \frac{BA \sin \angle ABB'}{\sin 36^\circ} = \frac{a \sin \varphi}{\sin 36^\circ},$$

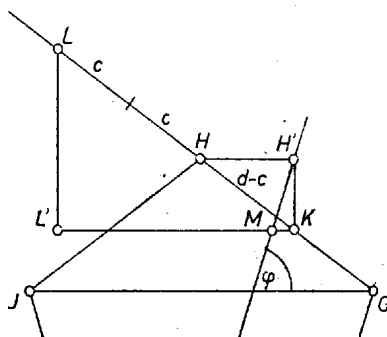
$$P_2B = \frac{c \sin(\varphi + 36^\circ)}{\sin 36^\circ}, \quad BP_5 = \frac{d \sin(\varphi - 36^\circ)}{\sin 36^\circ}.$$

Ezeket a $P_2B + BP_5 = P_2P_5 = P_4P_2 = AB'$ egyenlőségbe helyettesítve és a közös nevezőt elhagyva

$$c \sin(\varphi + 36^\circ) + d \sin(\varphi - 36^\circ) = a \sin \varphi,$$

$$(2) \quad \cotg \varphi = \frac{(c + d) \cos 36^\circ - a}{(d - c) \sin 36^\circ} = \frac{(c + d) \cos 36^\circ - a}{CD \sin 36^\circ}$$

A szükségessé vált 36° -os szöget egy előre megszerkesztett szabályos ötszög három egymás utáni G , H , J csúcsával meghatározott egyenlő szárú háromszögből vesszük (4. ábra).



4. ábra

Felmérjük a HG szárra a $HK = CD$, valamint H -n túli meghosszabbítására a $HL = 2BC$ szakaszt, így $KL = KH + HL = (d - c) + 2c = d + c$. K -n át párhuzamosot húzunk a GJ alappal, valamint merőlegest rá; legyen L vetülete az előbbin L' , és H vetülete az utóbbin H' . Mérjük fel végül L' -től K irányában az $L'M = AB$ szakaszt, ekkor a KMH' szög adja φ -t, ill. kiegészítő szögét, amennyiben M az $L'K$ meghosszabbításán adódott.

A φ szög ismeretében lényegében a II. megoldás befejező része szerint kaphatjuk meg az ötszöget.

Lényegében ugyanígy megy a számítás és a szerkesztés akkor is, ha C , D az 1. vagy a 2. ábra szerint helyezkednek el az E ponthoz viszonyítva.

Megjegyzések. 1. Számításunk kapcsolatba hozható az I. megoldásban felhasznált E ponttal. (2)-t alakítva

$$\cotg \varphi = \frac{c + d - \frac{a}{\cos 36^\circ}}{CD} \cdot \cotg 36^\circ,$$

másrészt, mint ismeretes,

$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \quad \text{és} \quad q : p = \frac{\sqrt{5}+1}{2} : 1,$$

ezért (1) alapján

$$\frac{a}{\cos 36^\circ} = 2 AB \cdot \frac{p}{q} = 2 BE,$$

ennélfogva a számláló $(BD - BE) + (BC - BE) = ED - CE$,

$$\cotg \varphi = \frac{ED - CE}{CD} \cdot \cotg 36^\circ.$$

Ezt pedig úgy is megkapjuk, ha a szinusz tételt a P_1CD háromszögre írjuk fel, alkalmazzuk a szögfelező osztásarányának tételét (hacsak $\varphi \neq 36^\circ$):

$$\frac{\sin(\varphi + 36^\circ)}{\sin(\varphi - 36^\circ)} = \frac{P_1D}{P_1C} = \frac{ED}{CE},$$

mindkét oldalból 1-et kivonva, ill. mindkettőhöz 1-et hozzáadva

$$\frac{2 \cos \varphi \sin 36^\circ}{\sin(\varphi - 36^\circ)} = \frac{ED - CE}{CE}, \quad \frac{2 \sin \varphi \cos 36^\circ}{\sin(\varphi - 36^\circ)} = \frac{CD}{CE},$$

végül ezek hányadosa azonos (3)-mal.

2. Az E pontnak pl. C -vel való egybeesése most már azt jelenti, hogy $a : c = AB : BC = AB : BE = q : p = 2 \cos 36^\circ$, így (2) számlálójá $(d - c) \cos 36^\circ$, és ezért d értékétől függetlenül $\varphi = 36^\circ$.